ฟังก์ชัน ลิมิต และความต่อเนื่อง
Function, Limit and Continuity

บทที่ 1

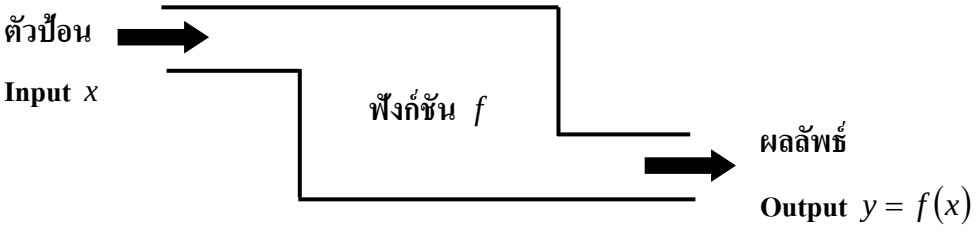
ฟังก์ชัน ลิมิต และความต่อเนื่อง เป็นความรู้พื้นฐานที่สำคัญของการศึกษาเกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชัน การปริพันธ์ รวมทั้งการประยุกต์อื่น ๆ เพื่อให้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้อย่างถูกต้อง

จุดมุ่งหมายการเรียนรู้

1. สามารถอธิบายความหมายของฟังก์ชัน ลิมิต และความต่อเนื่องได้
2. สามารถหาค่าฟังก์ชัน ลิมิต และความต่อเนื่องได้
3. สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้อย่างถูกต้อง

1.1 ฟังก์ชัน (Function)

ฟังก์ชันเป็นการแสดงความสัมพันธ์ของ 2 ตัวแปร คือ ตัวแปรต้น (Independent variable) กับตัวแปรตาม (Dependent variable) กำหนดให้ f แทนฟังก์ชัน เมื่อ x เป็นสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับที่อยู่ในฟังก์ชัน f เขียนได้เป็น $f(x)$ อ่านว่า “ฟังก์ชัน f ของ x” หรือ “ฟังก์ชัน f ณ ที่ x” โดยเขียนในรูป $y = f(x)$ กล่าว คือ y แยกออกจาก x ได้อย่างชัดเจน จะมีตัวแปรแต่ละตัวที่อยู่ในแต่ละข้างของเครื่องหมายเท่ากับ ซึ่งจะเรียกฟังก์ชันนี้ว่าฟังก์ชันโดยชัดแจ้ง (Explicit function) โดยที่ตัวแปร x จะเป็นตัวแปรต้นในฟังก์ชัน $f(x)$ และ y จะเป็นตัวแปรตาม ดังรูปที่ 1.1 ถ้าป้อนตัวป้อน x (Input) 1 ค่า จะได้ผลลัพธ์ y (Output) 1 ค่า



รูปที่ 1.1 ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

1.1.1 การหาค่าของฟังก์ชัน

ถ้ากำหนดฟังก์ชัน f ของ x แล้วสามารถหาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อกำหนด $y = f(x)$ ค่าของตัวแปร x จะเป็นตัวแปรป้อนเข้า ดังตารางที่ 1.1

ตารางที่ 1.1 ตารางแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต้น x และตัวแปรตาม y โดยกำหนดให้ $y = f(x) = 2x - 1$

ตัวแปรต้น x	ตัวแปรตาม $y = f(x)$
x	$y = f(x) = 2x - 1$
$x = -2$	$y = f(-2) = 2(-2) - 1 = -5$
$x = -1$	$y = f(-1) = 2(-1) - 1 = -3$
$x = 0$	$y = f(0) = 2(0) - 1 = -1$
$x = 1$	$y = f(1) = 2(1) - 1 = 1$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ตัวอย่าง 1.1 กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 3$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $f(0)$
2) $f(-1)$
3) $f(a)$
4) $f(b^2)$

<u>วิธีทำ</u> 1) $f(0)$ คือ ค่าของฟังก์ชัน $f(0)$ โดยการแทนค่า $x = 0$

ดังนั้น $f(0) = 0^2 + 3 = 0 + 3 = 3$

2) $f(-1)$ คือ ค่าของฟังก์ชัน $f(-1)$ โดยการแทนค่า $x = -1$

ดังนั้น $f(-1) = (-1)^2 + 3 = 1 + 3 = 4$

3) $f(a)$ คือ ค่าของฟังก์ชัน $f(a)$ โดยการแทนค่า $x = a$

ดังนั้น $f(a) = a^2 + 3$

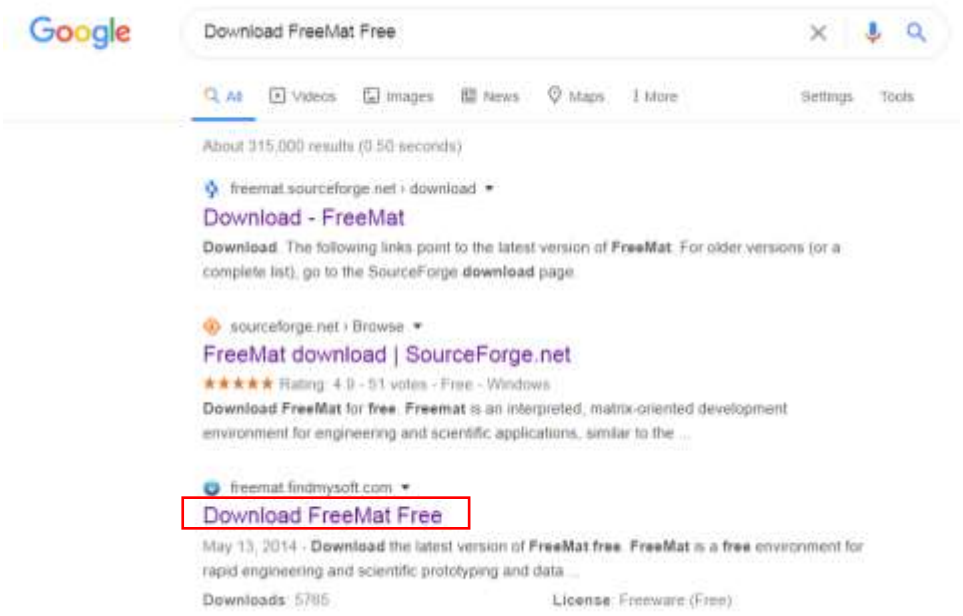
4) $f(b^2)$ คือ ค่าของฟังก์ชัน $f(b^2)$ โดยการแทนค่า $x = b^2$

ดังนั้น $f(b^2) = (b^2)^2 + 3 = b^4 + 3$

การคำนวณสามารถใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางด้านคณิตศาสตร์ (Programming Package for Mathematics) ซึ่งจะแนะนำให้เลือกโปรแกรมที่ไม่มีค่าใช้จ่ายในการติดตั้ง (Free Software Download) คือ โปรแกรม FreeMat เป็นโปรแกรมคำนวณทางคณิตศาสตร์ในลักษณะของ Open-source และไม่มีค่าใช้จ่ายใด ๆ จึงเหมาะแก่การใช้งานสำหรับการศึกษาให้แก่นักศึกษาควบคู่กับการเรียนทางทฤษฎี สำหรับการแก้ปัญหาต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และโปรแกรมมีส่วนในการช่วยตรวจคำตอบได้อีกทางหนึ่ง โดยมีความสามารถที่โดดเด่นกว่าเครื่องคำนวณทางคณิตศาสตร์ธรรมดาหรือ Graphing Calculator โปรแกรมนี้ยังสามารถสร้างกราฟจากสมการทางคณิตศาสตร์ได้ในรูปแบบต่าง ๆ และกำหนดสีที่แสดงให้เห็นถึงความแตกต่างของเส้นกราฟได้อย่างชัดเจน ทั้ง 2 มิติ หรือ 3 มิติ โดยมีหลักการหรือโครงสร้างคล้ายกับโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมาโดยมีลิขสิทธิ์หรือค่าใช้จ่ายจากการลงโปรแกรมอย่างถูกต้อง

ขั้นตอนการติดตั้งโปรแกรม FreeMat

1. เปิดหน้าต่างเข้าการค้นหากูเกิลเว็บไซต์ (Google website)
2. พิมพ์ Download FreeMat Free >> เลือก Download FreeMat Free ดังรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2 การค้นหาโปรแกรม FreeMat

ที่มา: https://www.google.com (2564)

3. เลือก Download ดังรูปที่ 1.3

รูปที่ 1.3 การดาวน์โหลด (Download) โปรแกรม FreeMat

ที่มา: https://www.freemat.findmysoft.com (2564)

4. คลิก FreeMat 4.2 - Free Download ดังรูปที่ 1.4

รูปที่ 1.4 ขั้นตอนที่ 1 ของการดาวน์โหลดโปรแกรม FreeMat

ที่มา: https://www.freemat.findmysoft.com/download

5. รอดาวน์โหลดไฟล์สมบูรณ์ >> คลิก FreeMat_4.2_0475….exe เพื่อประมวลผลโปรแกรมในการติดตั้ง ดังรูปที่ 1.5

รูปที่ 1.5 ขั้นตอนที่ 2 ของการดาวน์โหลดโปรแกรม FreeMat

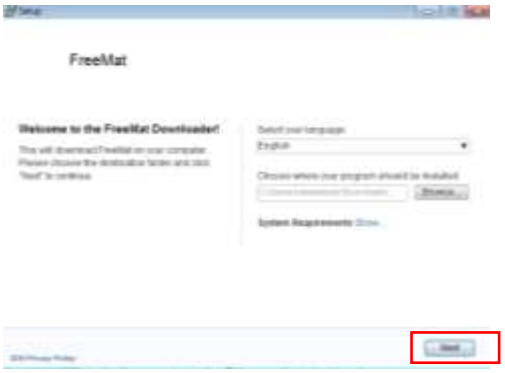
ที่มา: https://www.freemat.findmysoft.com/download

6. คลิก Run ดังรูปที่ 1.6

รูปที่ 1.6 ขั้นตอนการประมวลผลโปรแกรม FreeMat

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

7. คลิก Next >>

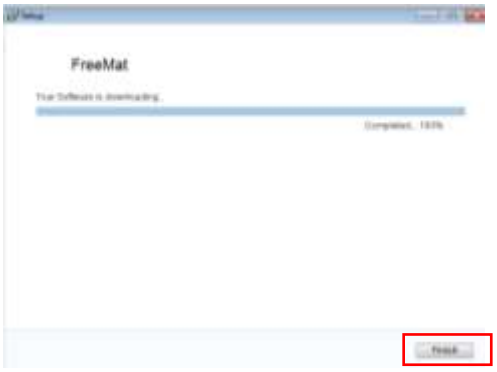


รูปที่ 1.6 (ก)

รอประมวลผล

รูปที่ 1.6 (ข)

รอประมวลผล



รูปที่ 1.6 (ค)

Install Now >>

รูปที่ 1.6 (ง)

คลิก Next >>

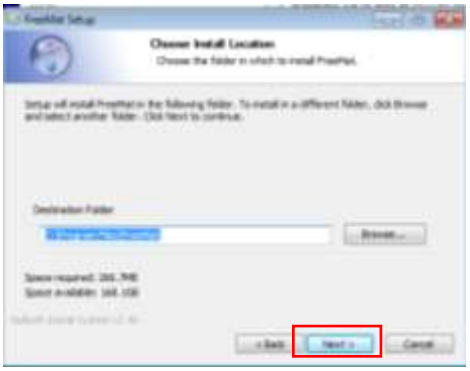
รูปที่ 1.6 (จ)

คลิก I Agree >>

รูปที่ 1.6 (ฉ)

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

คลิก Next >>

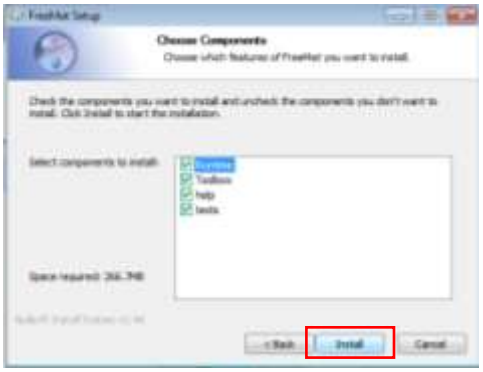


รูปที่ 1.6 (ช)

คลิก Next >>

รูปที่ 1.6 (ซ)

คลิก Install >>



รูปที่ 1.6 (ญ)

รอประมวลผล

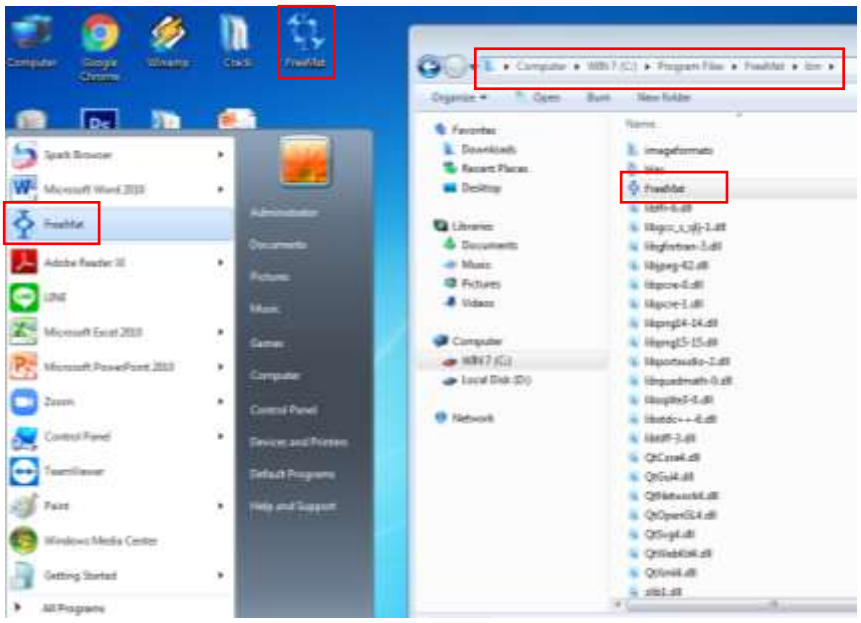
รูปที่ 1.6 (ฎ)

คลิก Finish

รูปที่ 1.6 (ฏ)

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

8. เมื่อทำการติดตั้งเสร็จสมบูรณ์ สามารถเปิดการใช้งานของ FreeMat ได้ ดังรูปที่ 1.7



รูปที่ 1.7 การเปิดใช้งานของโปรแกรม FreeMat

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

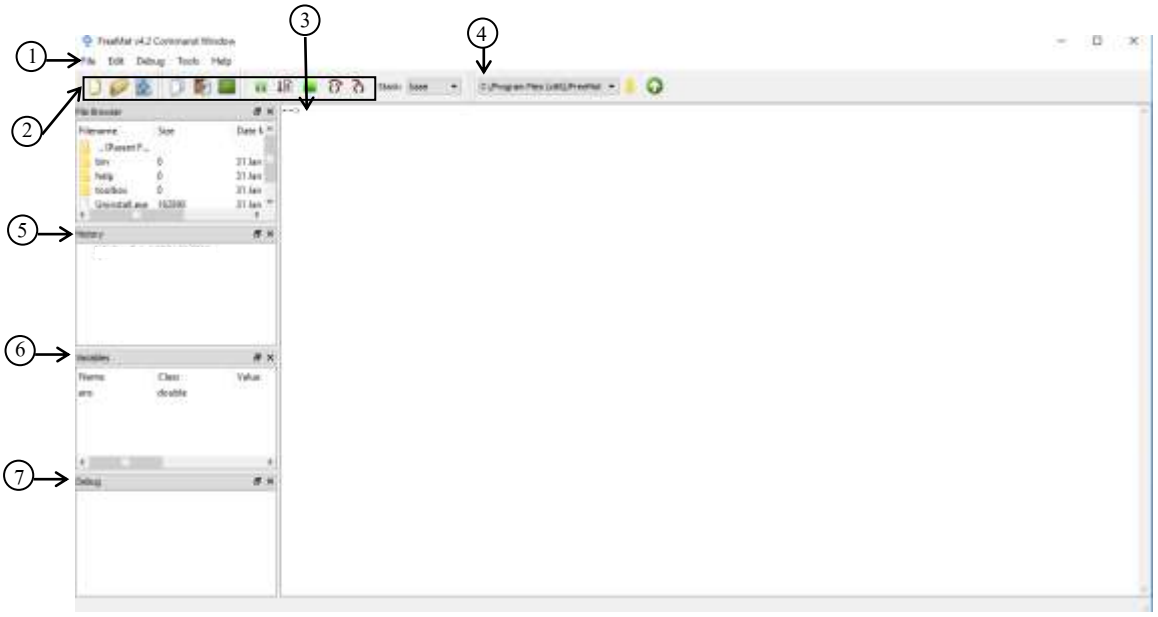
หรือสามารถพิมพ์ค้นหา FreeMat ได้ดังรูปที่ 1.7 (ก)

รูปที่ 1.7 (ก) พิมพ์ค้นหา FreeMat

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ขั้นตอนการใช้โปรแกรม FreeMat

เมื่อเปิดเข้าสู่การทำงานของโปรแกรม หน้าต่างจอภาพแรกที่พบจะเป็นดังรูปที่ 1.8



รูปที่ 1.8 การทำงานของโปรแกรม FreeMat

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

1. แสดงการเปิดเข้าใช้งานของโปรแกรม FreeMat
2. แถบเครื่องมือต่าง ๆ
3. แสดงสถานะใช้งาน และความพร้อมที่จะเตรียมรับคำสั่งต่าง ๆ เพื่อทำการคำนวณและประมวลผลของโปรแกรม
4. แสดงที่เก็บการทำงานของโปรแกรมปัจจุบัน
5. แสดงคำสั่งต่าง ๆ ที่สั่งให้โปรแกรมดำเนินการ
6. แสดงจำนวนของหน่วยความจำหรือขนาดของตัวแปรต่าง ๆ ของโปรแกรมปัจจุบัน
7. แสดงการประมวลผลของการเปิดโปรแกรมร่วมในการเปิดไฟล์ใหม่

จากตัวอย่าง 1.1 จงหาค่า $f(0)$ และ $f(-1)$ ของ $f(x)=x^2+3$ โดยใช้โปรแกรม FreeMat

ในการประยุกต์โจทย์ฟังก์ชันมาเขียนอยู่ในรูปแบบการใช้โปรแกรม สามารถกำหนดฟังก์ชันและค่าให้กับตัวแปรได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 เปิดเข้าสู่การทำงานของโปรแกรม FreeMat

ขั้นตอนที่ 2 พิมพ์กำหนดประกาศตัวแปรต่าง ๆ

พิมพ์กำหนด x = [ ] กด Enter

พิมพ์กำหนด y = x^2+3 กด Enter

ขั้นตอนที่ 3 หาค่า $f(0)$ โดย

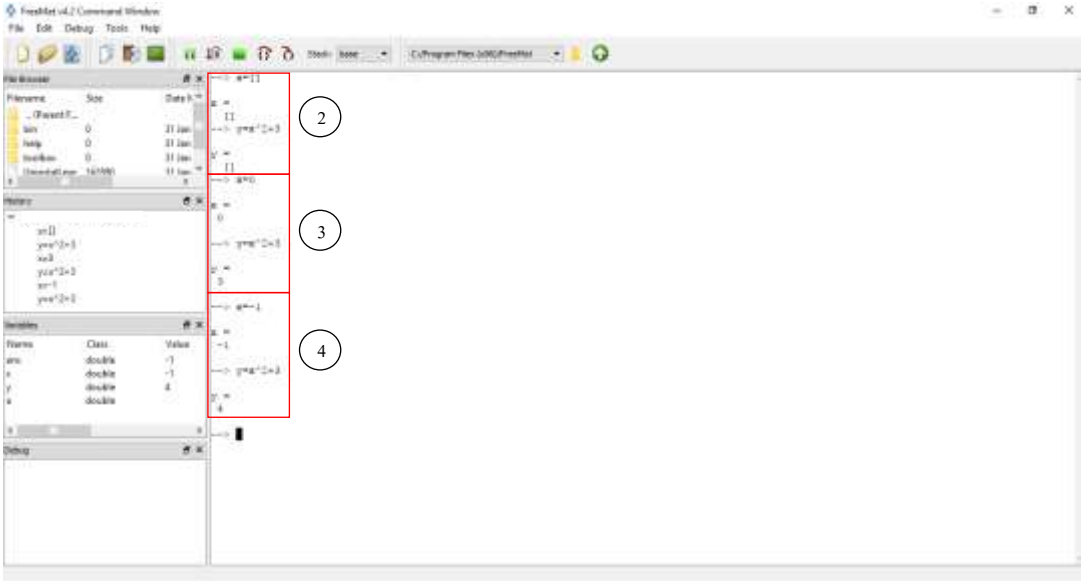
พิมพ์กำหนด x = 0 กด Enter

พิมพ์กำหนด y = x^2+3 กด Enter จะได้ค่า y = 3

ขั้นตอนที่ 4 หาค่า $f(-1)$ โดย

พิมพ์กำหนด x = -1 กด Enter

พิมพ์กำหนด y = x^2+3 กด Enter จะได้ค่า y = 4



รูปที่ 1.9 การพิมพ์กำหนดฟังก์ชันและค่าตัวแปรต่าง ๆ ของโปรแกรม FreeMat

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ตัวอย่าง 1.2 นักศึกษาสาขาวิชาเคมีคนหนึ่งต้องการแปลงหน่วยอุณหภูมิเคลวินเป็นองศาเซลเซียส

1) จงเขียนฟังก์ชันของอุณหภูมิองศาเซลเซียส
2) จงแปลงอุณหภูมิ 299 เคลวิน เป็นหน่วยองศาเซลเซียส
3) จงแปลงอุณหภูมิ 299 เคลวิน เป็นหน่วยองศาเซลเซียส โดยใช้โปรแกรม FreeMat

<u>วิธีทำ</u> 1) ให้ x แทนหน่วยอุณหภูมิเคลวิน

$f(x)$ แทนหน่วยอุณหภูมิองศาเซลเซียส

ดังนั้น ฟังก์ชันของอุณหภูมิองศาเซลเซียส คือ $f(x) = x - 273.15$

2) ถ้าอุณหภูมิ 299 เคลวิน แปลงเป็นหน่วยองศาเซลเซียส คือ

$f(299) = 299 - 273.15$

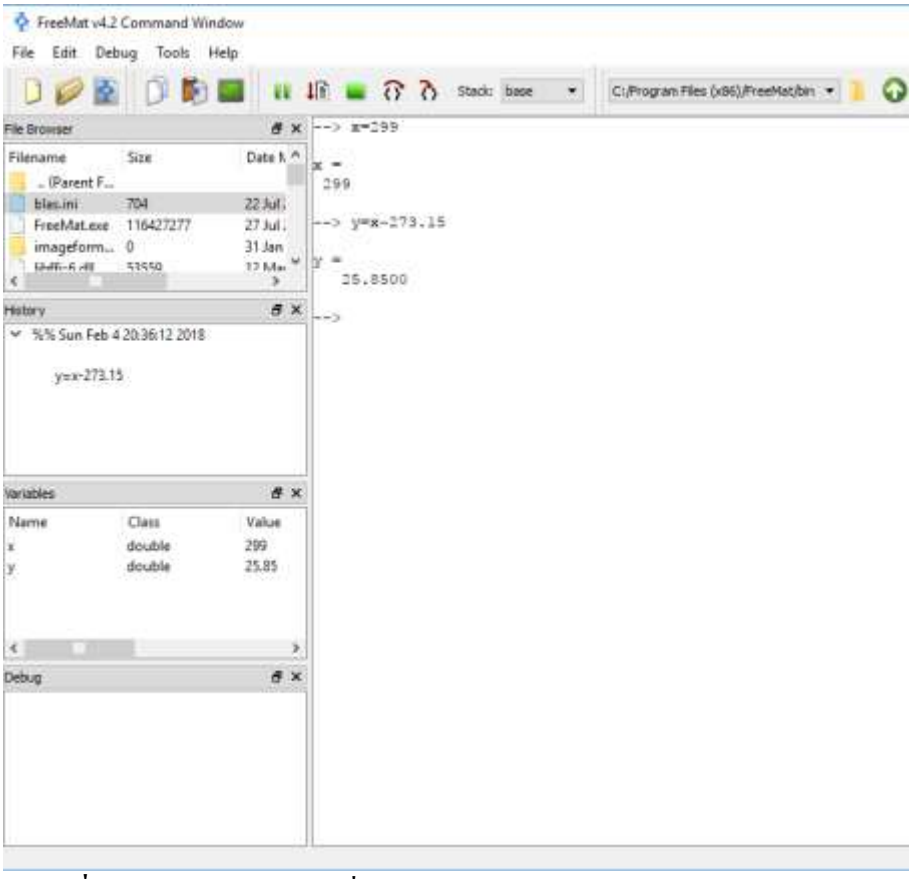
$= 25.85$ องศาเซลเซียส

ดังนั้น อุณหภูมิ 299 เคลวิน มีค่าเท่ากับ 25.85 องศาเซลเซียส

3) การแปลงอุณหภูมิ 299 เคลวิน เป็นหน่วยองศาเซลเซียส โดยใช้โปรแกรม FreeMat

พิมพ์กำหนด $x = 299$ กด Enter

พิมพ์กำหนด $y = x - 273.15$ กด Enter จะได้ค่า $y = 25.85$



รูปที่ 1.10 ค่าตัวแปรต่าง ๆ ที่ได้จากการประมวลผลของโปรแกรม FreeMat

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ตัวอย่าง 1.3 นักศึกษาสาขาวิชาคอมพิวเตอร์คนหนึ่ง เมื่อจบการศึกษาแล้วไปสมัครเข้าทำงานบริษัทแห่งหนึ่งเป็นพนักงานในบริษัทแห่งนี้ จะได้รับเงินค่าตอบแทนเดือนละ 20,000 บาท และได้รับส่วนแบ่งจากรายได้ในการเขียนโปรแกรมในแต่ละเดือน 12% ของรายได้ที่ทำให้แก่บริษัทในงานพิเศษ

1) จงเขียนฟังก์ชันแสดงรายได้ในแต่ละเดือน
2) ถ้าเดือนหนึ่งสามารถทำรายได้จากการเขียนโปรแกรมให้บริษัทเป็นจำนวน 100,000 บาท จะมีรายได้ทั้งหมดเท่าไร
3) ใช้โปรแกรม FreeMat คำนวณในข้อ 2)

<u>วิธีทำ</u>

<u>แนวคิด</u> $12\% = \frac{12}{100}$
$= 0.12$

1) ให้ x แทนรายได้จากการเขียนโปรแกรมของบริษัท
$f(x)$ แทนรายได้ทั้งหมดที่ได้รับจากบริษัท

ดังนั้น ฟังก์ชันแสดงรายได้ในแต่ละเดือน คือ $f(x) = 20{,}000 + 0.12x$

2) รายได้จากการเขียนโปรแกรมให้บริษัทในงานพิเศษเป็นจำนวน 100,000 บาท จะมีรายได้ทั้งหมด $f(100{,}000)$ ดังนี้

$$\begin{aligned} f(100{,}000) &= 20{,}000 + 0.12(100{,}000) \\ &= 20{,}000 + 12{,}000 \\ &= 32{,}000 \text{ บาท} \end{aligned}$$

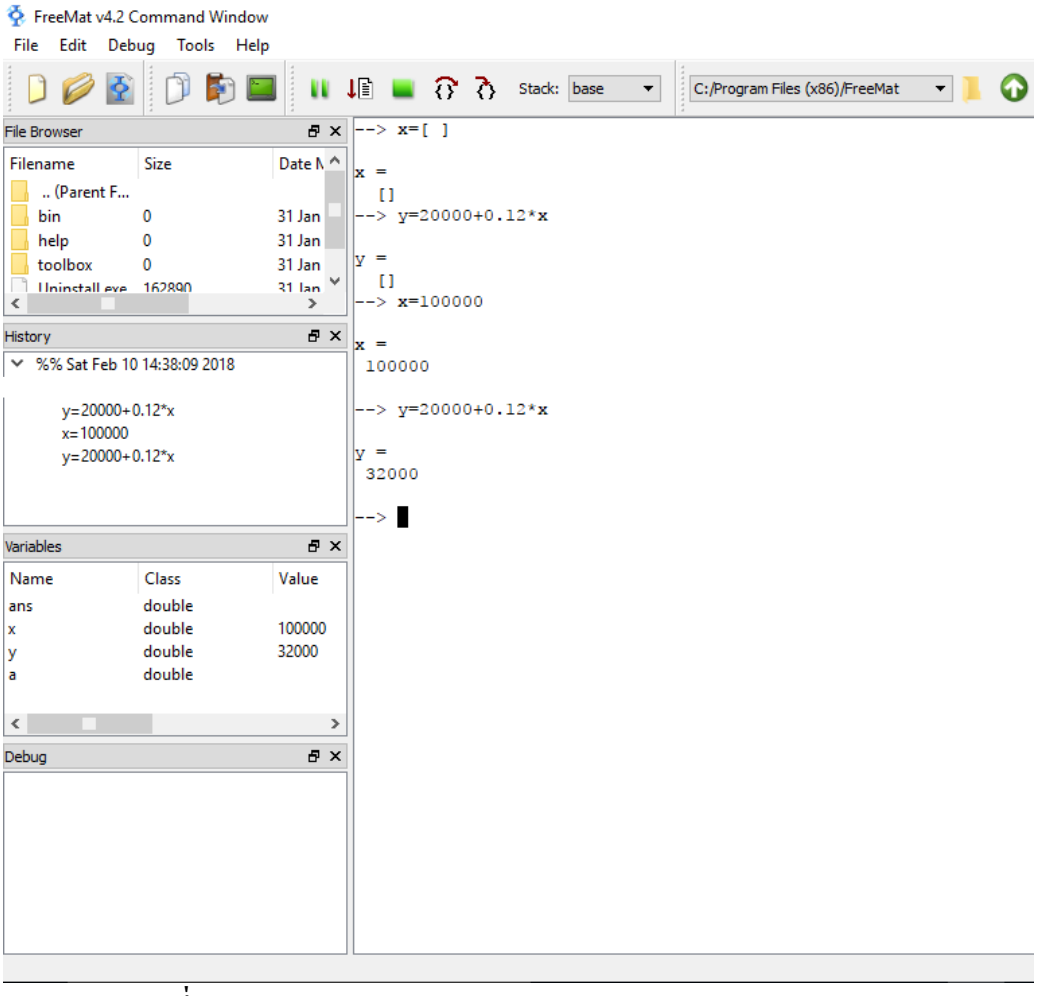
ดังนั้น จะมีรายได้ทั้งหมด 32,000 บาท

3) ใช้โปรแกรม FreeMat คำนวณในข้อ 2)

พิมพ์กำหนดประกาศตัวแปรต้น x = [ ] กด Enter

พิมพ์กำหนด $y = 20{,}000 + 0.12x$ กด Enter

พิมพ์ค่า $x = 100{,}000$ กด Enter จะได้ค่า $y = 32{,}000$



รูปที่ 1.11 โปรแกรม FreeMat ในการคำนวณ $f(x) = 20{,}000 + 0.12x$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

1.1.2 ชนิดของฟังก์ชัน (Type of function)

1) ฟังก์ชันพีชคณิต (Algebraic function) คือ ฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในพจน์ของตัวแปรอิสระ อาจมีพจน์เดียวหรือหลายพจน์ บวก ลบ คูณ หาร ยกกำลัง และกรณฑ์ ฟังก์ชันพีชคณิตมีดังนี้

1.1) ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial function) เป็นฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูป $f(x) = C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_n$ โดยที่ $C_1, C_2 \ldots, C_{n-2}, C_{n-1}, C_n$ เป็นจำนวนจริง และ $n \in I^+$ เรียกฟังก์ชันนี้ว่า “ฟังก์ชันพหุนามกำลัง n” ได้แก่ฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1.1) ฟังก์ชันคงตัว (Constant function) คือ ฟังก์ชันพหุนามกำลัง 0 มีรูปฟังก์ชันเป็น $f(x)=c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว เช่น $f(x)=-2$, $f(x)=3$ เป็นต้น

1.1.2) ฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear function) คือ ฟังก์ชันพหุนามกำลัง 1 มีรูปฟังก์ชันเป็น $f(x)=ax+b$ เมื่อ a,b เป็นค่าคงตัว เช่น $f(x)=6x-5$, $f(x)=5-2x$ เป็นต้น

1.1.3) ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic function) คือ ฟังก์ชันพหุนามกำลัง 2 มีรูปฟังก์ชันเป็น $f(x)=ax^2+bx+c$ เมื่อ a,b,c เป็นค่าคงตัว เช่น $f(x)=4x^2+8x-9$

1.2) ฟังก์ชันตรรกยะ (Rational function) คือ ฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูปเศษส่วนของพหุนาม $\frac{P(x)}{Q(x)}$ เมื่อ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม เช่น $\frac{3x+2}{x^2-2x-3}$ และ $\frac{x-1}{-5x+3}$ เป็นต้น

2) ฟังก์ชันอดิศัย (Transcendental function) คือ ฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต เช่น

2.1) ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (Exponential function) คือ ฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูป $f(x)=a^x$ เมื่อ $x\in R, a\in R^+$ และ $a\neq 1$ เช่น $f(x)=3^{2x}$, $h(x)=e^{4x-3}$ เป็นต้น

2.2) ฟังก์ชันลอกการิทึม (Logarithm function) คือ ฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูป $f(x)=\log_a x$ เมื่อ $x\in R, a\in R^+$ และ $a\neq 1$ เช่น $f(x)=\log_2 5$, $g(x)=\log 8$ เป็นต้น

1.2 พีชคณิตของฟังก์ชัน (Algebra of function)

เป็นการนำฟังก์ชันตั้งแต่ 2 ฟังก์ชันขึ้นไป สามารถนำมาบวก ลบ คูณ หรือหารกันได้ โดยทำให้ได้ฟังก์ชันใหม่ ดังนี้

1) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

2) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

3) $(f\,g)(x)=f(x)g(x)$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$; $g(x)\neq 0$

ตัวอย่าง 1.4 กำหนดให้ $f(x)=x+2$ และ $g(x)=3x-1$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $(f+g)(x)$

2) $(f-g)(x)$

3) $(f\,g)(x)$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

<u>วิธีทำ</u>

1) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$=(x+2)+(3x-1)$

$=x+2+3x-1$

$=4x+1$

2) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

$=(x+2)-(3x-1)$

$=x+2-3x+1$

$=-2x+3$

3) $(f\,g)(x)=f(x)g(x)$

$=(x+2)(3x-1)$

$=3x^2-x+6x-2$

$=3x^2+5x-2$

คูณกระจาย

$(x+2)(3x-1)=3x^2-x+6x-2$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$; $g(x)\neq 0$

$= \frac{x+2}{3x-1}$; $3x-1\neq 0$

โดยตัวส่วนต้องมีค่าไม่เท่ากับศูนย์

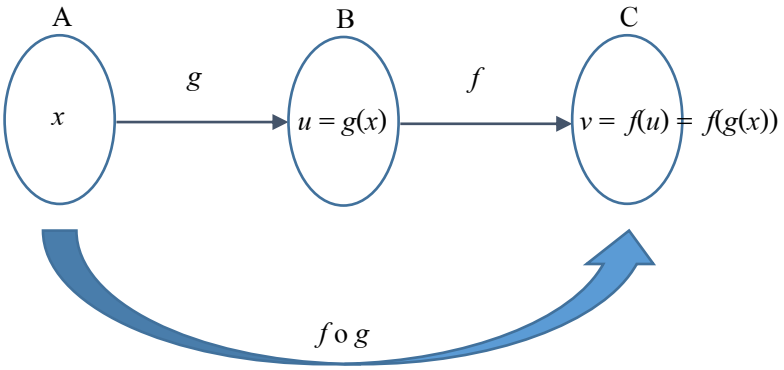
$3x-1\neq 0$

$3x\neq 1$

$x\neq \frac{1}{3}$

1.3 ฟังก์ชันประกอบ (Composite function)

กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ถ้า $v = f(u)$ และ $u = g(x)$ แล้วฟังก์ชันประกอบของ $f(u)$ และ $g(x)$ เขียนแทนด้วย $(f \circ g)(x)$ กำหนดให้เป็น $(f \circ g)(x) = f(g(x))$



รูปที่ 1.12 รูปแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ถ้า $g : A \to B$ หมายถึง ให้ g เป็นฟังก์ชันจากเซต A ไป B โดยที่ $u = g(x)$

ถ้า $f : B \to C$ หมายถึง ให้ f เป็นฟังก์ชันจากเซต B ไป C โดยที่ $v = f(u)$

จะได้ $f \circ g : A \to C$ โดยที่ $v = f(g(x))$ ดังนั้น $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ และ $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

ตัวอย่าง 1.5 กำหนดให้ $f(x) = 4x^2 - 3$ และ $g(x) = x + 1$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $(f \circ g)(x)$
2) $(g \circ f)(x)$
3) $(f \circ f)(x)$
4) $(g \circ g)(x)$

<u>วิธีทำ</u> 1) $(f \circ g)(x)$

$= f(g(x))$

$= f(x + 1)$

$= 4(x + 1)^2 - 3$

$= 4(x^2 + 2x + 1) - 3$

$= 4x^2 + 8x + 4 - 3$

$= 4x^2 + 8x + 1$

แทน $g(x) = x + 1$

จาก $f(x) = 4x^2 - 3$

แทน $x = x + 1$

$(x + 1)^2 = (x + 1)(x + 1)$

$= x^2 + 2x + 1$

1) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ แทน $f(x) = 4x^2 - 3$

$= g(4x^2 - 3)$ จาก $g(x) = x + 1$

$= (4x^2 - 3) + 1$ แทน $x = 4x^2 - 3$

$= 4x^2 - 3 + 1$

$= 4x^2 - 2$

2) $(f \circ f)(x) = f(f(x))$ แทน $f(x) = 4x^2 - 3$

$= f(4x^2 - 3)$ จาก $f(x) = 4x^2 - 3$

$= 4(4x^2 - 3)^2 - 3$ แทน $x = 4x^2 - 3$

$= 4(16x^4 - 24x^2 + 9) - 3$ $(4x^2 - 3)^2 = (4x^2 - 3)(4x^2 - 3)$

$= 64x^4 - 96x^2 + 36 - 3$ $= 16x^4 - 12x^2 - 12x^2 + 9$

$= 64x^4 - 96x^2 + 33$ $= 16x^4 - 24x^2 + 9$

3) $(g \circ g)(x) = g(g(x))$ แทน $g(x) = x + 1$

$= g(x + 1)$ จาก $g(x) = x + 1$

$= (x + 1) + 1$ แทน $x = x + 1$

$= x + 1 + 1$

$= x + 2$

ตัวอย่าง 1.6 กำหนดให้ $f(x) = e^x$ และ $g(x) = x - 1$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $(f \circ g)(x)$
2) $(g \circ f)(x)$
3) $(f \circ g)(1)$
4) $(g \circ f)(0)$

<u>วิธีทำ</u>

1) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= f(x-1)$

$= e^{x-1}$

2) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$= g(e^x)$

$= e^x - 1$

3) $(f \circ g)(1) = f(g(1))$

$= f(1-1)$

$= f(0)$

$= e^0$

$= 1$

4) $(g \circ f)(0) = g(f(0))$

$= g(e^0)$

$= g(1)$

$= 1-1$

$= 0$

ตัวอย่าง 1.7 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < -1 \\ 1 & ; x \geq -1 \end{cases}$ และ $g(x) = \dfrac{x^2}{2-x}$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $(f \circ g)(-2)$

2) $(g \circ f)(0)$

<u>วิธีทำ</u>

1) $(f \circ g)(-2) = f(g(-2))$

$= f\left(\dfrac{(-2)^2}{2-(-2)}\right)$

$= f\left(\dfrac{4}{2+2}\right)$

$= f\left(\dfrac{4}{4}\right)$

$= f(1)$

$= 1$

2) $(g \circ f)(0) = g(f(0))$

$= g(1)$

$= \dfrac{1^2}{2-1}$

$= \dfrac{1}{1}$

$= 1$

ตัวอย่าง 1.8 กำหนดให้ $f(x) = 2\sin x$ และ $g(x) = \ln x$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $(f \circ g)(x)$
2) $(f \circ g)(1)$
3) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

<u>วิธีทำ</u>

1) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= f(\ln x)$

$= 2\sin(\ln x)$

2) $(f \circ g)(1) = 2\sin(\ln 1)$

$= 2(\sin 0)$

$= 2(0)$

$= 0$

3) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

$= 2\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$= 1$

1.4 ลิมิตของฟังก์ชัน (Limits of function)

ค่าลิมิตของฟังก์ชันจะมีความแตกต่างค่าของฟังก์ชัน เนื่องจากค่าของฟังก์ชัน f ที่จุด $x = a$ จะหมายถึงว่า $f(a)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด แต่ค่าลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a นั้น ต้องการที่พิจารณาหาค่าของฟังก์ชัน f ว่ามีค่าเท่าใดในขณะที่ x เข้าใกล้ a

1.4.1 ลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ x เข้าใกล้ a $(x \to a)$

การพิจารณาค่าของฟังก์ชัน f ซึ่งกำหนดโดย $f(x) = x^2 + 1$ สำหรับค่า x ต่าง ๆ ที่มีค่าเข้าใกล้ $a = 3$ แบ่งเป็นได้ 2 กรณี ดังตารางต่อไปนี้

1. ถ้า x เข้าใกล้ $a = 3$ ทางซ้าย สามารถเขียนแทนด้วย $x \to 3^-$ (ค่า x ที่ใช้ มีค่าน้อยกว่า 3)

ตารางที่ 1.2 ตารางแสดง x เข้าใกล้ $a = 3$ ทางซ้าย

$x < 3$	2	2.5	2.9	2.99	2.999	2.9999	$\Rightarrow 3$
$f(x) = x^2 + 1$	5	7.25	9.41	9.9401	9.994001	9.99940001	$\Rightarrow 10$

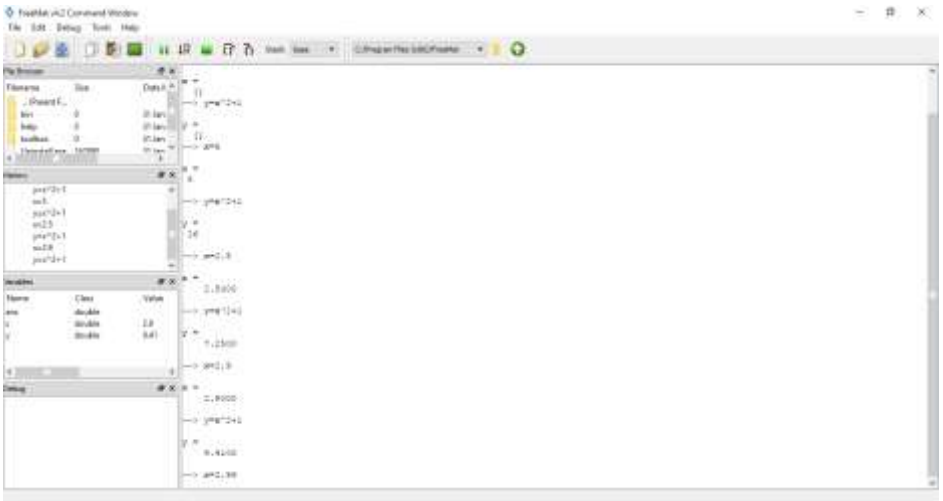
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากตาราง เมื่อแทน x มีค่าเข้าใกล้ 3 ทางซ้าย ($x < 3$) จะได้ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ค่า 10 คือ

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \left(x^2 + 1\right) = 10$$

$\lim_{x \to 3^-} \left(x^2 + 1\right)$ หมายถึงลิมิตของฟังก์ชัน $x^2 + 1$ โดยที่ x เข้าใกล้ 3 ทางซ้าย

<u>ข้อสังเกต</u> เครื่องหมาย - ที่อยู่ด้านบนของ 3 บ่งบอกถึงการเข้าใกล้จากทางด้านซ้ายด้านเดียว และสามารถใช้โปรแกรม FreeMat เข้ามาช่วยในการคำนวณค่า $f(x)$ ได้



รูปที่ 1.13 โปรแกรม FreeMat ของ $\lim_{x\to 3^-}\left(x^2+1\right)$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

2. ถ้า x เข้าใกล้ $a=3$ ทางขวา สามารถเขียนแทนด้วย $x\to 3^+$ (ค่า x ที่ใช้ มีค่ามากกว่า 3)

ตารางที่ 1.3 ตารางแสดง x เข้าใกล้ $a=3$ ทางขวา

$x>3$	4	3.5	3.1	3.01	3.001	3.0001	$\Rightarrow 3$
$f(x)=x^2+1$	17	13.25	10.61	10.0601	10.006	10.0006	$\Rightarrow 10$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

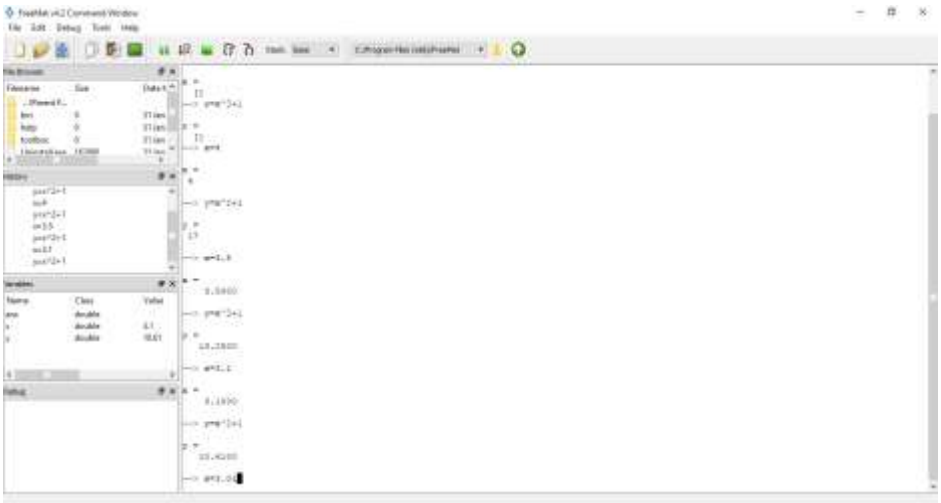
จากตาราง เมื่อแทน x มีค่าเข้าใกล้ 3 ทางขวา ($x>3$) จะได้ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ค่า 10 คือ

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\left(x^2+1\right)=10$$

$\lim_{x\to 3^+}\left(x^2+1\right)$ หมายถึงลิมิตของฟังก์ชัน x^2+1 โดยที่ x เข้าใกล้ 3 ทางขวา

<u>ข้อสังเกต</u> เครื่องหมาย + ที่อยู่ด้านบนของ 3 บ่งบอกถึงการเข้าใกล้จากทางด้านขวาด้านเดียว

และสามารถใช้โปรแกรม FreeMat เข้ามาช่วยในการคำนวณค่า $f(x)$ ได้



รูปที่ 1.14 โปรแกรม FreeMat ของ $\lim_{x\to 3^+}\left(x^2+1\right)$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

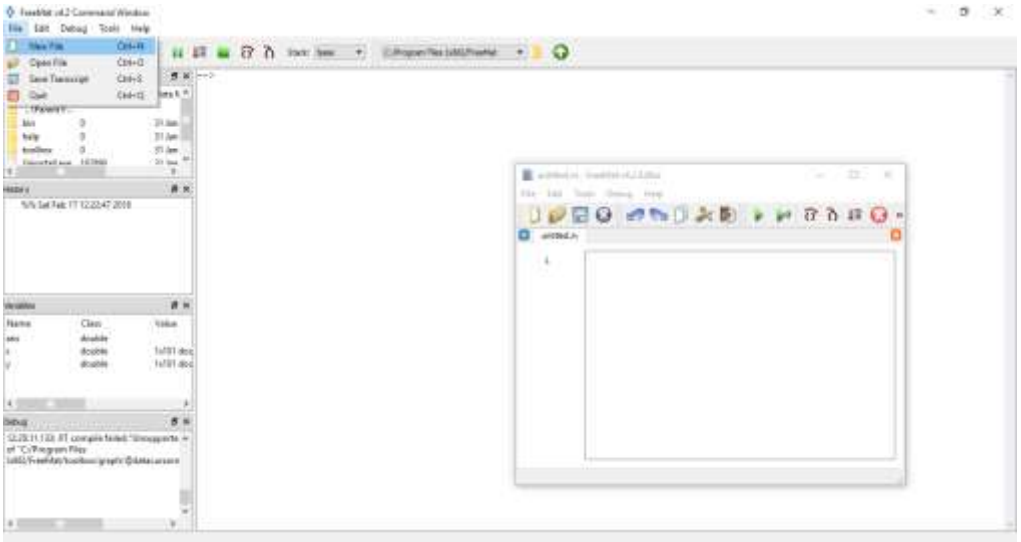
จากภาพทั้งสอง จะเห็นได้ว่า เมื่อค่าของ x เข้าใกล้ 3 (จากสองด้าน ทั้งซ้ายหรือขวา) ค่าของฟังก์ชัน $f(x)=x^2+1$ มีค่าเข้าใกล้ 10 ดังนั้นจะได้ว่า

ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)=x^2+1$ มีค่าเท่ากับ 10 เมื่อ x เข้าใกล้ 3 สามารถเขียนโดยใช้สัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$\lim_{x\to 3}\left(x^2+1\right)=10$$

หรือสามารถพิจารณาค่าของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 3 ได้จากการสร้างกราฟของโปรแกรม FreeMat ตามขั้นตอนดังนี้

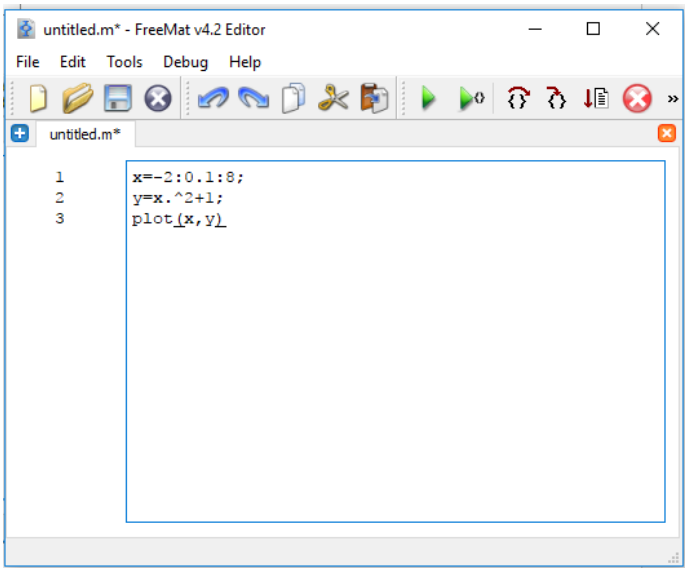
คลิกเลือก File >> New File >> จะปรากฏจอหน้าต่างใหม่ ดังรูปที่ 1.15



รูปที่ 1.15 การสร้างกราฟของโปรแกรม FreeMat

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

และพิมพ์รายละเอียดการสร้างกราฟลงในหน้าต่างใหม่ของโปรแกรม ดังรูป



รูปที่ 1.16 การพิมพ์กำหนดเพื่อสร้างกราฟของโปรแกรม FreeMat

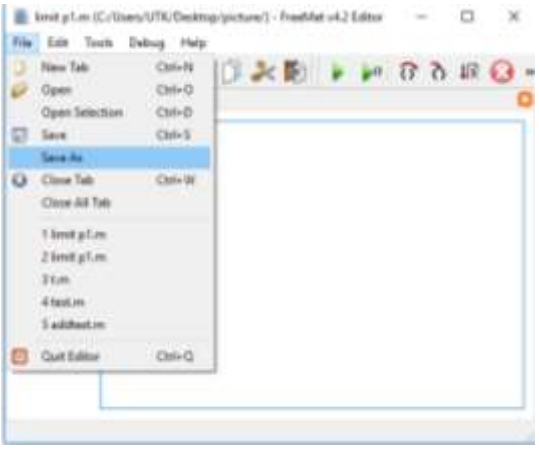
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

<u>บรรทัดที่ 1</u> หมายถึง ให้สร้างกราฟในแนวแกน x ที่มีค่าตั้งแต่ -2 ถึง 8

<u>บรรทัดที่ 2</u> หมายถึง ฟังก์ชันที่ต้องการสร้างกราฟ

<u>บรรทัดที่ 3</u> หมายถึง คำสั่งสร้างกราฟในแนวแกน x และ y ในรูปของ 2 มิติ

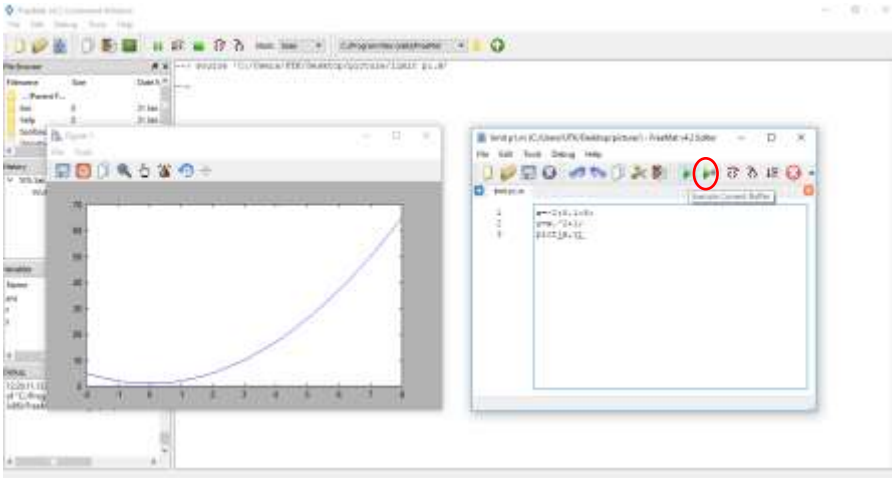
หลังจากนั้นบันทึกไฟล์และตั้งชื่อพร้อมทั้งจัดเก็บในแหล่งที่เราต้องการ ดังรูป



รูปที่ 1.17 การบันทึกไฟล์กราฟของโปรแกรม FreeMat

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

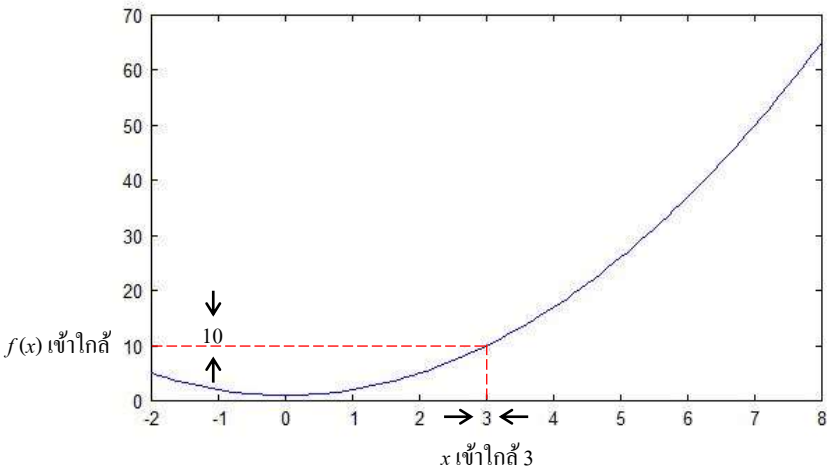
เมื่อทำการบันทึกไฟล์แล้วเลือกใช้คำสั่ง Execute Current Buffer ในการสร้างกราฟดังรูป



รูปที่ 1.18 การประมวลผลกราฟของโปรแกรม FreeMat

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

การพิจารณาค่าของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 3 จากรูป



รูปที่ 1.19 กราฟจากโปรแกรม FreeMat ของ $\lim_{x\to 3}(x^2+1)$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากรูป $\lim_{x\to 3^-} f(x)=10$ และ $\lim_{x\to 3^+} f(x)=10$

ดังนั้น $\lim_{x\to 3} f(x)=10$ หรือ $\lim_{x\to 3}(x^2+1)=10$

และโดยทั่วไปจะนิยามลิมิตของฟังก์ชัน ดังนี้

ทฤษฎีบท ถ้าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าเท่ากับจำนวนจริง L โดยที่ x มีค่าเข้าใกล้จำนวนจริง a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x\to a} f(x)=L$ แล้วจะเรียก L ว่าเป็นลิมิตของ $f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=L$ โดย x เข้าใกล้ a จากทั้ง 2 ด้าน (ซ้ายและขวา) โดยที่ $x \neq a$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=L}$$

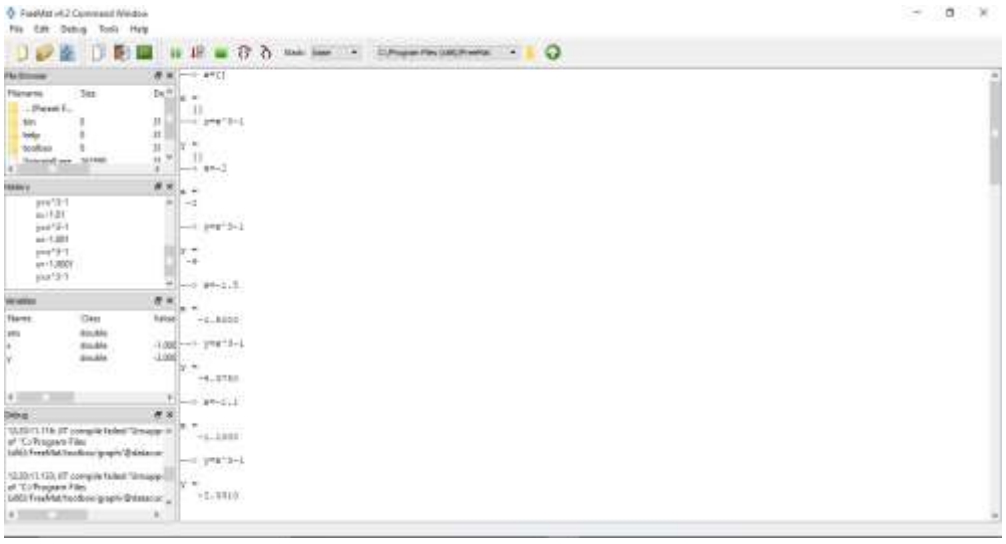
ถ้าลิมิตทางด้านซ้ายหรือด้านขวาหาค่าได้ แต่มีค่าไม่เท่ากัน หรือหาค่าไม่ได้ จะกล่าวได้ว่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่มีค่าลิมิต หรือหาค่าไม่ได้ เมื่อ x เข้าใกล้ a

ตัวอย่าง 1.9 จงหาค่าของ $\lim_{x\to -1}\left(x^3-1\right)$ พร้อมทั้งสร้างกราฟจากโปรแกรม FreeMat

<u>วิธีทำ</u> 1. ถ้า x เข้าใกล้ a = -1 ทางซ้าย สามารถเขียนแทนด้วย $x \to$ -1$^-$ (ค่า x ที่ใช้มีค่าน้อยกว่า -1)

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}\left(x^3-1\right) = -2$$

$\lim_{x\to -1^-}\left(x^3-1\right)$ หมายถึงลิมิตของฟังก์ชัน $\left(x^3-1\right)$ โดยที่ x เข้าใกล้ -1 ทางซ้าย สามารถใช้โปรแกรม FreeMat เข้ามาช่วยในการคำนวณค่า $f(x)$ ได้



รูปที่ 1.20 โปรแกรม FreeMat ของ $\lim_{x\to -1^-}\left(x^3-1\right)$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ได้ค่าจากการคำนวณโปรแกรม FreeMat ดังตาราง

ตารางที่ 1.4 ตารางแสดง x เข้าใกล้ -1 ทางซ้าย

x < -1	-2	-1.5	-1.1	-1.01	-1.001	-1.0001	$\Rightarrow$ -1
$f(x) = x^3$ - 1	-9	-4.375	-2.331	-2.0303	-2.003	-2.0003	$\Rightarrow$ -2

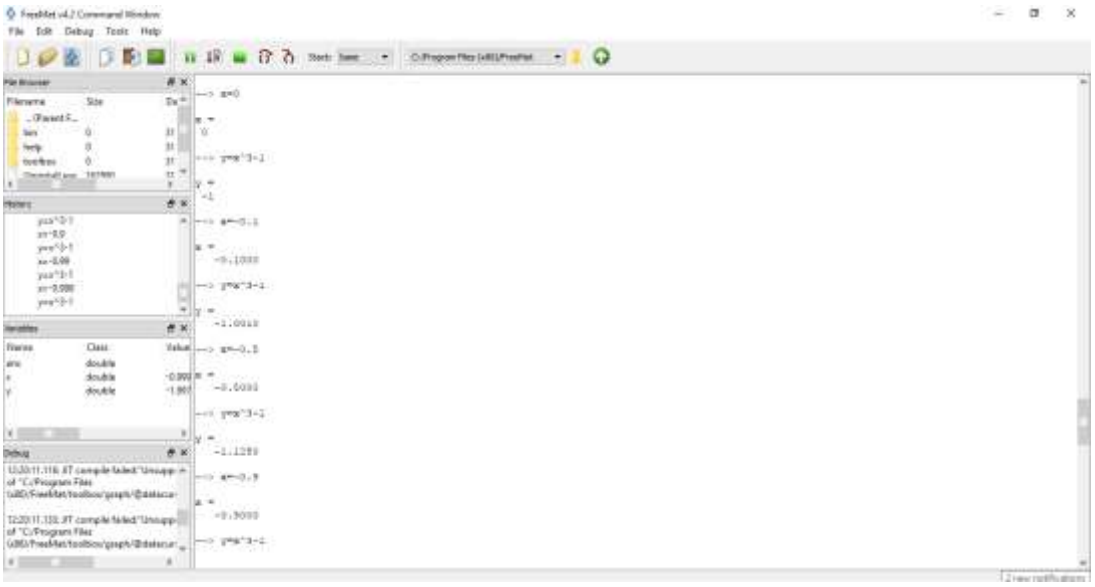
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากตาราง เมื่อแทน x มีค่าเข้าใกล้ -1 ทางซ้าย (x < -1) จะได้ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ค่า -2

2. ถ้า x เข้าใกล้ a = -1 ทางขวา สามารถเขียนแทนด้วย $x \to -1^+$ (ค่า x ที่ใช้มีค่ามากกว่า -1)

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \left(x^3 - 1\right) = -2$$

$\lim_{x \to -1^+} \left(x^3 - 1\right)$ หมายถึงลิมิตของฟังก์ชัน $\left(x^3 - 1\right)$ โดยที่ x เข้าใกล้ -1 ทางขวา สามารถใช้โปรแกรม FreeMat เข้ามาช่วยในการคำนวณค่า $f(x)$ ได้



รูปที่ 1.21 โปรแกรม FreeMat ของ $\lim_{x \to -1^+} \left(x^3 - 1\right)$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

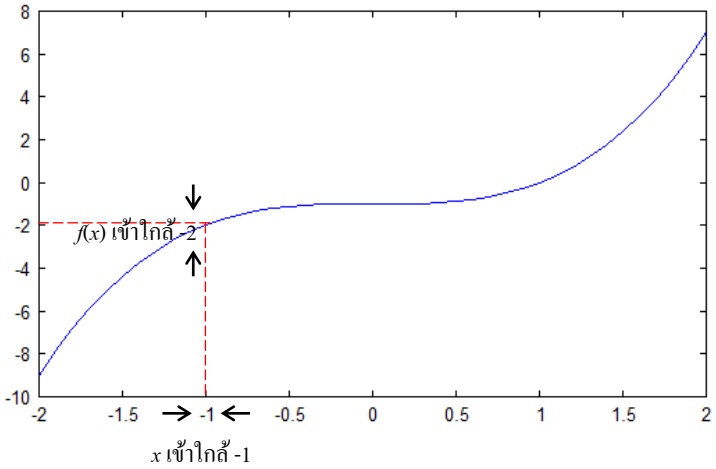
ได้ค่าจากการคำนวณโปรแกรม FreeMat ดังตาราง

ตารางที่ 1.5 ตารางแสดง x เข้าใกล้ -1 ทางขวา

$x > -1$	0	-0.1	-0.5	-0.9	-0.99	-0.999	$\Rightarrow$ -1
$f(x) = x^3 - 1$	-1	-1.001	-1.125	-1.729	-1.9703	-1.997	$\Rightarrow$ -2

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากตาราง เมื่อแทน x มีค่าเข้าใกล้ -1 ทางขวา ($x > -1$) จะได้ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ค่า -2



รูปที่ 1.22 กราฟจากโปรแกรม FreeMat ของ $\lim_{x\to -1} f\left(x^3-1\right)$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากรูป $\lim_{x\to -1^-} f(x)=-2$ และ $\lim_{x\to -1^+} f(x)=-2$

ดังนั้น $\lim_{x\to -1} f(x)=-2$ หรือ $\lim_{x\to -1} f\left(x^3-1\right)=-2$

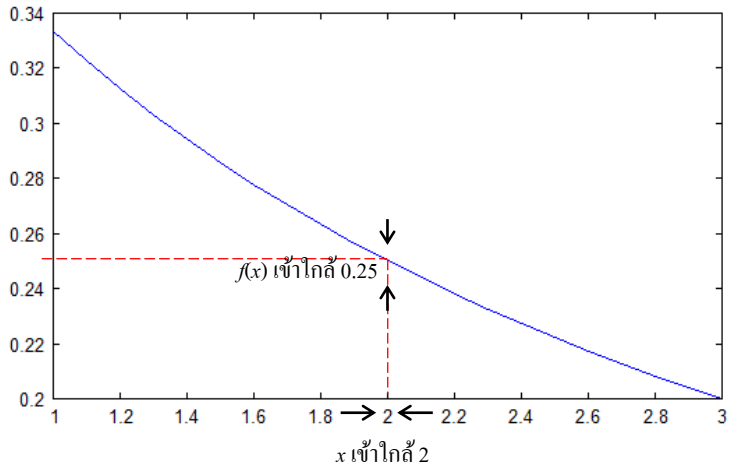
ตัวอย่าง 1.10 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)$ พร้อมทั้งสร้างกราฟจากโปรแกรม FreeMat

<u>วิธีทำ</u> $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)=\frac{2-2}{2^2-4}=\frac{0}{0}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด (Indeterminate Forms)

ดังนั้นจะหาลิมิตของฟังก์ชันนี้โดยการแยกตัวประกอบ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)&=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}\\&=\frac{1}{2+2}\\&=\frac{1}{4}\\&=0.25\end{aligned}$$

สร้างกราฟจากโปรแกรม FreeMat



รูปที่ 1.23 กราฟจากโปรแกรม FreeMat ของ $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากรูป $\lim_{x\to 2^-} f(x)=0.25$ และ $\lim_{x\to 2^+} f(x)=0.25$

ดังนั้น $\lim_{x\to 2} f(x)=0.25$ หรือ $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)=0.25$

ตัวอย่าง 1.11 กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & ; x<1 \\ \ln x & ; x\geq 1\end{cases}$ จงหาค่าของ $\lim_{x\to 1} f(x)$

<u>วิธีทำ</u> $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\sqrt{x-1}=\sqrt{1-1}=0$

และ $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(\ln x)=\ln 1=0$

จะได้ว่า $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=0$

ดังนั้น $\lim_{x\to 1} f(x)=0$

ตัวอย่าง 1.12 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{|2-x|}$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา $|2-x| = \begin{cases} +(2-x) & ; 2-x \ge 0,\ x \le 2 \\ -(2-x) & ; 2-x < 0,\ x > 2 \end{cases}$

กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{2-x}{|2-x|} = \begin{cases} \dfrac{2-x}{+(2-x)} = 1 & ;\ x \le 2 \\ \dfrac{2-x}{-(2-x)} = -1 & ;\ x > 2 \end{cases}$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$ และ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -1$

ซึ่ง $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \ne \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{|2-x|}$ ไม่มีลิมิตหรือหาค่าไม่ได้ (เนื่องจากค่าลิมิตด้านซ้ายไม่เท่ากับด้านขวา)

1.4.2 ทฤษฎีเบื้องต้นของลิมิต

ในการหาลิมิตของฟังก์ชันต่าง ๆ ถ้ากำหนดให้ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ เมื่อ L และ M เป็นจำนวนจริงใด ๆ สามารถหาค่าลิมิตได้โดยใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้ช่วยในการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันได้ง่ายและรวดเร็วกว่าการใช้บทนิยาม

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ ถ้า $f(x) = c$ เป็นฟังก์ชันค่าคงที่ สำหรับทุก ๆ ค่า x

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a$ ถ้า $f(x) = x$ และ

   $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \sqrt{a}$ ถ้า $f(x) = \sqrt{x}$ เมื่อ $a > 0$

3. $\lim\limits_{x\to a}[cf(x)] = c\lim\limits_{x\to a} f(x) = cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่

4. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = L \pm M$

5. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\lim\limits_{x\to a} g(x) = LM$

6. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\dfrac{L}{M}$ โดยที่ $M\neq 0$

7. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}$ ถ้า $L>0,\ n$ เป็นจำนวนคู่บวก หรือ ถ้า $L\leq 0$, n เป็นจำนวนคี่บวก

8. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n=\left[\lim\limits_{x\to a}f(x)\right]^n=L^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง 1.13 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2+x-1\right)$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(2x^2+x-1\right)&=\lim_{x\to 1}2x^2+\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}1\\&=2\lim_{x\to 1}x^2+\lim_{x\to 1}x-1\\&=2(1)^2+1-1\\&=2\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.14 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to -2}(x-2)(x^2+5)$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}(x-2)(x^2+5)&=\lim_{x\to -2}(x-2)\lim_{x\to -2}(x^2+5)\\&=(-2-2)\left((-2)^2+5\right)\\&=(-4)(4+5)\\&=(-4)\cdot(9)=-36\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.15 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3}{2x^2-3x-5}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3}{2x^2-3x-5}&=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^3-3)}{\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-3x-5)}\\&=\frac{\lim\limits_{x\to 3}x^3-\lim\limits_{x\to 3}3}{\lim\limits_{x\to 3}2x^2-\lim\limits_{x\to 3}3x-\lim\limits_{x\to 3}5}\\&=\frac{\lim\limits_{x\to 3}x^3-\lim\limits_{x\to 3}3}{2\lim\limits_{x\to 3}x^2-3\lim\limits_{x\to 3}x-5}\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3}{2x^2-3x-5}=\frac{3^3-3}{2(3)^2-3(3)-5}$$

$$=\frac{27-3}{2(9)-9-5}$$

$$=\frac{24}{18-9-5}$$

$$=\frac{24}{18-14}$$

$$=\frac{24}{4}\quad=6$$

ตัวอย่าง 1.16 จงหาค่าของ $\lim_{x\to -1}\sqrt{\frac{x^2+8}{x^2+4x+7}}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\lim_{x\to -1}\sqrt{\frac{x^2+8}{x^2+4x+7}}=\sqrt{\frac{\lim_{x\to -1}(x^2+8)}{\lim_{x\to -1}(x^2+4x+7)}}$$

$$=\sqrt{\frac{\lim_{x\to -1}x^2+\lim_{x\to -1}8}{\lim_{x\to -1}x^2+\lim_{x\to -1}4x+\lim_{x\to -1}7}}$$

$$=\sqrt{\frac{\lim_{x\to -1}x^2+8}{\lim_{x\to -1}x^2+4\lim_{x\to -1}x+7}}$$

$$=\sqrt{\frac{(-1)^2+8}{(-1)^2+4(-1)+7}}$$

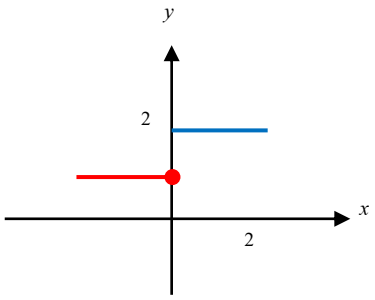
$$=\sqrt{\frac{1+8}{1+4(-1)+7}}$$

$$=\sqrt{\frac{9}{1-4+7}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$$

ตัวอย่าง 1.17 จงหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases} 1 \ ; \ x\le 0 \\ 2 \ ; \ x>0 \end{cases}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0

<u>วิธีทำ</u> การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ สามารถพิจารณาได้ดังนี้

- ลิมิตเข้าใกล้ด้านซ้าย คือ เมื่อ $x\to 0^-$ จะได้ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$ และ
- ลิมิตเข้าใกล้ด้านขวา คือ เมื่อ $x\to 0^+$ จะได้ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2$



รูปที่ 1.24 กราฟของ $f(x)$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จะเห็นได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\ne \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้ ที่ $x=0$ ดังรูป

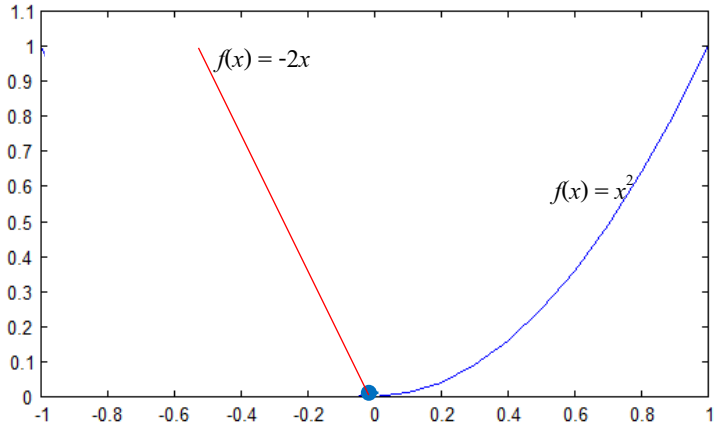
ตัวอย่าง 1.18 จงหาค่าลิมิตของ $f(x)=\begin{cases} -2x \ ; \ x<0 \\ x^2 \ ; \ x\ge 0 \end{cases}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0

<u>วิธีทำ</u> การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ สามารถพิจารณาได้ดังนี้

- ลิมิตเข้าใกล้ด้านซ้าย คือ เมื่อ $x\to 0^-$ จะได้ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-2x)=-2(0)=0$ และ
- ลิมิตเข้าใกล้ด้านขวา คือ เมื่อ $x\to 0^+$ จะได้ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2=0^2=0$

จะเห็นได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ ดังรูปที่ 1.25



รูปที่ 1.25 กราฟจากโปรแกรม FreeMat ลิมิตของฟังก์ชัน
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ตัวอย่าง 1.19 จงหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases} 1-x & ; x<2 \\ x^2-3 & ; x\geq 2 \end{cases}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2

<u>วิธีทำ</u> การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ สามารถพิจารณาได้ดังนี้

- ลิมิตเข้าใกล้ 2 ด้านซ้าย คือ เมื่อ $x\to 2^-$ จะได้ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(1-x)=1-2=-1$ และ
- ลิมิตเข้าใกล้ 2 ด้านขวา คือ เมื่อ $x\to 2^+$ จะได้ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-3)=2^2-3=4-3=1$

จะเห็นได้ว่า $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้ ที่ $x=2$

การหาค่าลิมิตของฟังก์ชันในบางโจทย์ ดังตัวอย่างต่อไป เมื่อแทนค่า x ด้วย a แล้วจะทำให้ค่าลิมิตของฟังก์ชันอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ ซึ่งเป็นรูปแบบไม่กำหนด ดังนั้นต้องจัดรูปของฟังก์ชันใหม่ เพื่อตัดพจน์ที่ทำให้ส่วนเป็น 0 ออกไป โดยใช้วิธีต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์

ตัวอย่าง 1.20 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$

<u>วิธีทำ</u> หาลิมิตโดยการแทนค่า $x=3$ ไม่ได้ เนื่องจาก เมื่อ $x=3$ แล้วทำให้ส่วนที่เป็น $x-3=0$

ซึ่งทำให้ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\dfrac{3^2-9}{3-3}=\dfrac{0}{0}$ เป็นรูปแบบไม่กำหนด

ดังนั้น ต้องจัดรูปของฟังก์ชันนี้ให้เป็นฟังก์ชันใหม่โดยวิธีการแยกตัวประกอบพหุนาม

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\boxed{x^2-3^2}}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}$$

$$=\lim_{x\to 3}(x+3)$$

$$=3+3=6$$

$น^2-ล^2=(น-ล)(น+ล)$

$x^2-3^2=(x-3)(x+3)$

น คือ x และ ล คือ 3

ข้อสังเกต ตัวประกอบ $x-3$ สามารถถูกกำจัดออกไปได้ เนื่องจากการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันไม่ได้พิจารณาที่ $x=3$ และ $x-3\neq 0$ ที่ทุก ๆ x ซึ่ง $x\neq 3$

ตัวอย่าง 1.21 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{x-4}$

<u>วิธีทำ</u> หาลิมิตโดยการแทนค่า $x=4$ ไม่ได้ เนื่องจาก เมื่อ $x=4$ แล้วทำให้ส่วนที่เป็น $x-4=0$

ซึ่งทำให้ $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{x-4}=\dfrac{4^3-64}{4-4}=\dfrac{0}{0}$ เป็นรูปแบบไม่กำหนด

ดังนั้น ต้องจัดรูปของฟังก์ชันนี้ให้เป็นฟังก์ชันใหม่โดยวิธีการแยกตัวประกอบพหุนาม

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^3-64}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\boxed{x^3-4^3}}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(x-4)}(x^2+4x+4^2)}{\cancel{x-4}}$$

$$=\lim_{x\to 4}(x^2+4x+4^2)=\lim_{x\to 4}(x^2+4x+16)$$

$$=4^2+4(4)+16=16+16+16=48$$

$น^3-ล^3=(น-ล)(น^2+นล+ล^2)$

$x^3-4^3=(x-4)(x^2+x(4)+4^2)$

น คือ x และ ล คือ 4

ตัวอย่าง 1.22 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$

<u>วิธีทำ</u> หาลิมิตโดยการแทนค่า $x=1$ ไม่ได้ เนื่องจาก เมื่อ $x=1$ แล้วทำให้ส่วนที่เป็น $x-1=0$

ซึ่งทำให้ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}=\dfrac{(1)^2+2(1)-3}{1-1}=\dfrac{0}{0}$ เป็นรูปแบบไม่กำหนด

ดังนั้น ต้องจัดรูปของฟังก์ชันนี้ให้เป็นฟังก์ชันใหม่โดยวิธีการแยกตัวประกอบพหุนาม

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x+3)$$

$$=1+3=4$$

ตัวอย่าง 1.23 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2+6x+5}$

<u>วิธีทำ</u> หาลิมิตโดยการแทนค่า $x=-5$ ไม่ได้ เนื่องจาก เมื่อ $x=-5$ แล้วทำให้ส่วนเป็น 0

ซึ่งทำให้ $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2+6x+5}=\dfrac{(-5)^2+3(-5)-10}{(-5)^2+6(-5)+5}=\dfrac{25-15-10}{25-30+5}=\dfrac{0}{0}$

เป็นรูปแบบไม่กำหนด

ดังนั้น ต้องจัดรูปของฟังก์ชันนี้ให้เป็นฟังก์ชันใหม่โดยวิธีการแยกตัวประกอบพหุนาม

$$\lim_{x\to -5}\frac{x^2+3x-10}{x^2+6x+5}=\lim_{x\to -5}\frac{(x-2)(x+5)}{(x+1)(x+5)}$$

$$=\lim_{x\to -5}\frac{(x-2)\cancel{(x+5)}}{(x+1)\cancel{(x+5)}}$$

$$=\lim_{x\to -5}\frac{(x-2)}{(x+1)}$$

$$=\frac{-5-2}{-5+1}$$

$$=\frac{-7}{-4}=\frac{7}{4}$$

ตัวอย่าง 1.24 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$

<u>วิธีทำ</u> หาลิมิตโดยการแทนค่า $x=9$ ไม่ได้ เนื่องจาก เมื่อ $x=9$ แล้วทำให้ส่วนที่เป็น $9-x=0$ ซึ่งทำให้ $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}=\dfrac{3-\sqrt{9}}{9-9}=\dfrac{3-3}{0}=\dfrac{0}{0}$ เป็นรูปแบบไม่กำหนด

ดังนั้น ต้องจัดรูปของฟังก์ชันนี้ให้เป็นฟังก์ชันใหม่โดยวิธีการแยกตัวประกอบ

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{9-x} &= \lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{3^2-(\sqrt{x})^2}\\
&= \lim_{x\to 9}\frac{\cancel{3-\sqrt{x}}}{\cancel{(3-\sqrt{x})}(3+\sqrt{x})}\\
&= \lim_{x\to 9}\frac{1}{3+\sqrt{x}}\\
&= \frac{1}{3+\sqrt{9}}\\
&= \frac{1}{3+3}\\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} น^2 - ล^2 &= (น-ล)(น+ล)\\ 3^2-(\sqrt{x})^2 &= (3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})\end{aligned}}$$

หรือสามารถแก้ปัญหาโจทย์โดยวิธีการคูณสังยุคทั้งเศษและส่วน

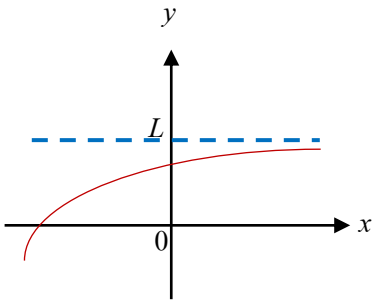
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{9-x} &= \lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}\cdot\frac{3+\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}\\
&= \lim_{x\to 9}\frac{3^2-(\sqrt{x})^2}{(9-x)(3+\sqrt{x})}\\
&= \lim_{x\to 9}\frac{\cancel{9-x}}{\cancel{(9-x)}(3+\sqrt{x})}\\
&= \lim_{x\to 9}\frac{1}{(3+\sqrt{x})}\\
&= \frac{1}{3+\sqrt{9}}\\
&= \frac{1}{3+3}\\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} (น-ล)(น+ล) &= น^2 - ล^2\\ (3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x}) &= 3^2-(\sqrt{x})^2\end{aligned}}$$

1.4.3 ลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ x เข้าใกล้อนันต์ ($x \to \pm\infty$) และลิมิตค่าอนันต์

พิจารณาค่าลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x ซึ่งมีค่ามากขึ้นอย่างไม่มีการจำกัดขอบเขต หรือ x มีค่าน้อยลงอย่างไม่มีการจำกัดขอบเขต

<u>กรณีที่ 1</u> พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$



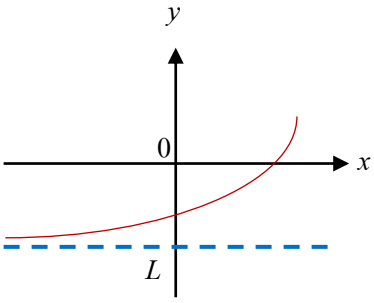
รูปที่ 1.26 ลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ $x \to +\infty$ มีค่าเท่ากับ L

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากรูป เมื่อ x มีค่ามากขึ้นอย่างไม่มีการจำกัดขอบเขต ฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L ในกรณีนี้จะได้ว่า ค่าลิมิตของฟังก์ชัน f ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์บวกมีค่าเท่ากับ L เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

<u>กรณีที่ 2</u> พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$



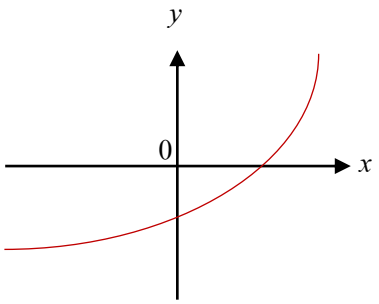
รูปที่ 1.27 ลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ $x \to -\infty$ มีค่าเท่ากับ L

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากรูป เมื่อ x มีค่าน้อยลงอย่างไม่มีการจำกัดขอบเขต ฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L ในกรณีนี้จะได้ว่า ค่าลิมิตของฟังก์ชัน f ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์ลบมีค่าเท่ากับ L เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

<u>กรณีที่ 3</u> พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$



รูปที่ 1.28 ลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ $x \to \infty$ มีค่าเท่ากับบวกอนันต์
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

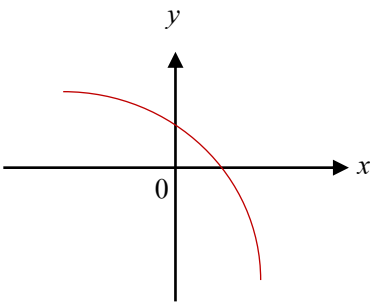
จากรูป เมื่อ x มีค่ามากขึ้นอย่างไม่มีการจำกัดขอบเขต ฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่ามากขึ้น ในกรณีนี้จะได้ว่า ค่าลิมิตของฟังก์ชัน f ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์บวกมีค่าเท่ากับบวกอนันต์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

และเมื่อ x มีค่าน้อยลงอย่างไม่มีการจำกัดขอบเขต ฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าน้อยลง ในกรณีนี้จะได้ว่า ค่าลิมิตของฟังก์ชัน f ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์ลบมีค่าเท่ากับลบอนันต์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

<u>กรณีที่ 4</u> พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$



รูปที่ 1.29 ลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ $x \to \infty$ มีค่าเท่ากับลบอนันต์

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากรูป เมื่อ x มีค่ามากขึ้นอย่างไม่มีการจำกัดขอบเขต ฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าน้อยลง ในกรณีนี้จะได้ว่า ค่าลิมิตของฟังก์ชัน f ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์บวกมีค่าเท่ากับลบอนันต์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

และเมื่อ x มีค่าน้อยลงอย่างไม่มีการจำกัดขอบเขต ฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่ามากขึ้น ในกรณีนี้จะได้ว่า ค่าลิมิตของฟังก์ชัน f ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์ลบมีค่าเท่ากับบวกอนันต์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

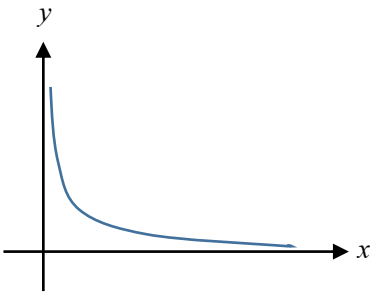
<u>กรณีที่ 5</u> พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y = f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ เมื่อ x มีค่ามากขึ้น ๆ ($x \to \infty$) จากตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1.6 ตารางแสดง x เข้าใกล้ค่าอนันต์

x	10	100	1000	10000	100000	1000000	$\Rightarrow \infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001	$\Rightarrow 0$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากตาราง 0 เมื่อ x มีค่ามากขึ้นๆ ($x \to \infty$)ฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 0

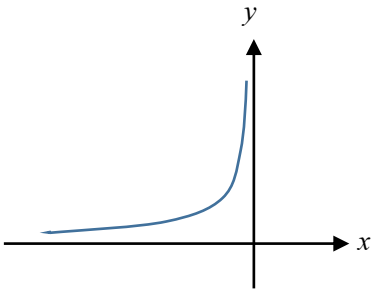


รูปที่ 1.30 $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้แกน x เมื่อ x มีค่ามากขึ้น
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากรูป เมื่อ x มีค่ามากขึ้นอย่างไม่มีการจำกัดขอบเขต ฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้แกน x เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

และในทำนองเดียวกัน เมื่อ x มีค่าน้อยลงอย่างไม่มีการจำกัดขอบเขต ฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้แกน x เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$



รูปที่ 1.31 $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้แกน x เมื่อ x มีค่าน้อยลง
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

1.4.4 ทฤษฎีเบื้องต้นของลิมิตเข้าใกล้อนันต์ และลิมิตค่าอนันต์

1. $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$ เมื่อ $n > 0$
2. $\lim_{x\to-\infty} x^n = \infty$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคู่
3. $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ เมื่อ $n>0$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

6. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^n}=\infty$ เมื่อ $n>0$

7. $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x^n}=\infty$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่บวก

8. $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x^n}=-\infty$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวก

ตัวอย่าง 1.25 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\\&=0-0\\&=0\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.26 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)&=\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}-\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^3}\\&=5\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}+4\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}-2\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}\\&=5(0)+4(0)-2(0)\\&=0\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.27 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to0}\left(2-\dfrac{4}{x^3}\right)$

<u>วิธีทำ</u> การหาค่าลิมิตสามารถพิจารณาได้ดังนี้

- ลิมิตเข้าใกล้ด้านซ้าย คือ เมื่อ $x\to0^-$ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to0^-}\left(2-\dfrac{4}{x^3}\right)$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(2-\frac{4}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0^-}2-\lim_{x\to 0^-}\frac{4}{x^3}$$
$$=2-4\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}$$
$$=2-4(-\infty)$$
$$=2+\infty$$
$$=\infty$$

- ลิมิตเข้าใกล้ด้านขวา คือ เมื่อ $x\to 0^+$ เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to 0^+}\left(2-\frac{4}{x^3}\right)$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(2-\frac{4}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0^+}2-\lim_{x\to 0^+}\frac{4}{x^3}$$
$$=2-4\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}$$
$$=2-4(\infty)$$
$$=2-\infty$$
$$=-\infty$$

จะเห็นได้ว่า $\lim_{x\to 0^-}\left(2-\frac{4}{x^3}\right)\neq\lim_{x\to 0^+}\left(2-\frac{4}{x^3}\right)$ ดังนั้น $\lim_{x\to 0}\left(2-\frac{4}{x^3}\right)$ ไม่มีค่าลิมิต

ตัวอย่าง 1.28 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{4}{x^4}-2\right)$

<u>วิธีทำ</u> การหาค่าลิมิตสามารถพิจารณาได้ดังนี้

- ลิมิตเข้าใกล้ด้านซ้าย คือ เมื่อ $x\to 0^-$ เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{4}{x^4}-2\right)$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{4}{x^4}-2\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{4}{x^4}-\lim_{x\to 0^-}2$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{4}{x^4}-2\right)=4\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^4}-2$$

$$=4(-\infty)-2$$

$$=-\infty-2=-\infty$$

- ลิมิตเข้าใกล้ด้านซ้าย คือ เมื่อ $x \to 0^+$ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{4}{x^4}-2\right)$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{4}{x^4}-2\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{4}{x^4} - \lim_{x\to 0^+} 2$$

$$= 4\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^4} - 2$$

$$= 4(\infty) - 2$$

$$= \infty - 2$$

$$= \infty$$

จะเห็นได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{4}{x^4}-2\right) \neq \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{4}{x^4}-2\right)$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{4}{x^4}-2\right)$ ไม่มีค่าลิมิต

ตัวอย่าง 1.29 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x^3+\frac{1}{x^2}\right)$

<u>วิธีทำ</u>

$$\lim_{x\to\infty}\left(2x^3+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} 2x^3 + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}$$

$$= 2\lim_{x\to\infty} x^3 + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}$$

$$= \infty + 0$$

$$= \infty$$

ตัวอย่าง 1.30 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^3+5x^5\right)$

<u>วิธีทำ</u>

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x^3+5x^5\right) = \lim_{x\to-\infty} 3x^3 + \lim_{x\to-\infty} 5x^5$$

$$= 3\lim_{x\to-\infty} x^3 + 5\lim_{x\to-\infty} x^5$$

$$= 3\lim_{x\to-\infty} x^3 + 5\lim_{x\to-\infty} x^5$$

$$= 3(-\infty) + 5(-\infty)$$

$$= -\infty$$

ถ้าการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันตรรกยะซึ่งมีผลลัพธ์อยู่ในรูป $\pm\frac{\infty}{\infty}$ เมื่อ $x \to \pm\infty$ ซึ่งเป็นรูปแบบที่ยังไม่กำหนด จึงต้องกำจัดรูป $\pm\frac{\infty}{\infty}$ โดยการแปลงฟังก์ชันจากโจทย์ โดยนำพจน์ (ตัวแปร) ที่มีกำลังสูงสุดหารทั้งเศษและส่วน เพื่อให้ได้ฟังก์ชันใหม่จากการแปลงโดยวิธีดังกล่าว

ตัวอย่าง 1.31 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{8x^4-3x^2+1}{2x^4+x-5}\right)$

<u>วิธีทำ</u> $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{8x^4-3x^2+1}{2x^4+x-5}\right)=\frac{\infty}{\infty}$ แปลงโจทย์โดยหารทั้งเศษและส่วนด้วย x^4 ซึ่งเป็นพจน์ที่มีกำลังสูงสุดในโจทย์

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8x^4-3x^2+1}{2x^4+x-5}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{8x^4-3x^2+1}{x^4}}{\frac{2x^4+x-5}{x^4}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{8x^4}{x^4}-\frac{3x^2}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{2x^4}{x^4}+\frac{x}{x^4}-\frac{5}{x^4}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{2+\frac{1}{x^3}-\frac{5}{x^4}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{2+\frac{1}{x^3}-\frac{5}{x^4}}\right)$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}8-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^4}}$$

$$=\frac{8-0+0}{2+0-0}$$

$$=\frac{8}{2}$$

$$=4$$

ตัวอย่าง 1.32 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^3-3x+4}{9x^6+6x-7}\right)$

<u>วิธีทำ</u> $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^3-3x+4}{9x^6+6x-7}\right)=-\dfrac{\infty}{\infty}$ แปลงโจทย์โดยหารทั้งเศษและส่วนด้วย x^6 ซึ่งเป็นพจน์ที่มีกำลังสูงสุดในโจทย์

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3-3x+4}{9x^6+6x-7}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\dfrac{2x^3-3x+4}{x^6}}{\dfrac{9x^6+6x-7}{x^6}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\dfrac{2x^3}{x^6}-\dfrac{3x}{x^6}+\dfrac{4}{x^6}}{\dfrac{9x^6}{x^6}+\dfrac{6x}{x^6}-\dfrac{7}{x^6}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{3}{x^5}+\dfrac{4}{x^6}}{9+\dfrac{6}{x^5}-\dfrac{7}{x^6}}\right)$$

$$=\frac{0-0+0}{9+0-0}$$

$$=\frac{0}{9}$$

$$=0$$

ตัวอย่าง 1.33 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\sqrt{9x^2+1}}{6x-5}\right)$

<u>วิธีทำ</u> $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\sqrt{9x^2+1}}{6x-5}\right)=\dfrac{\infty}{\infty}$ เนื่องจาก $\sqrt{x^2}=-x$ เมื่อ $x<0$ แปลงโจทย์โดยการหารทั้งเศษและส่วนด้วย $-x$ ซึ่งเป็นพจน์ที่มีกำลังสูงสุดในโจทย์

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{9x^2+1}}{6x-5}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\dfrac{\sqrt{9x^2+1}}{-x}}{\dfrac{6x-5}{-x}}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{9x^2+1}}{6x-5}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\dfrac{\sqrt{9x^2+1}}{-x}}{\dfrac{6x-5}{-x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{9+\dfrac{1}{x^2}}}{-6+\dfrac{5}{x}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{9+0}}{-6+0}$$

$$=\frac{\sqrt{9}}{-6}$$

$$=\frac{3}{-6}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

ตัวอย่าง 1.34 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x^2+1\right)^5}{7x^6-3x^4+5}$

<u>วิธีทำ</u> $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x^2+1\right)^5}{7x^6-3x^4+5}=\dfrac{\infty}{\infty}$ แปลงโจทย์โดยการหารทั้งเศษและส่วนด้วย x^{10} ซึ่งเป็นพจน์ที่มีกำลังสูงสุดในโจทย์

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+1\right)^5}{7x^6-3x^4+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\left(x^2+1\right)^5}{x^{10}}}{\dfrac{7x^6-3x^4+5}{x^{10}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\left(x^2+1\right)^5}{\left(x^2\right)^5}}{\dfrac{7x^6}{x^{10}}-\dfrac{3x^4}{x^{10}}+\dfrac{5}{x^{10}}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)^5}{7x^6-3x^4+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^5}{\frac{7}{x^4}-\frac{3}{x^6}+\frac{5}{x^{10}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^5}{\frac{7}{x^4}-\frac{3}{x^6}+\frac{5}{x^{10}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)^5}{\frac{7}{x^4}-\frac{3}{x^6}+\frac{5}{x^{10}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^5}{\frac{7}{x^4}-\frac{3}{x^6}+\frac{5}{x^{10}}}$$

$$=\frac{(1+0)^5}{0-0+0}$$

$$=\frac{1}{0}=\infty$$

1.5 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (Continuous functions)

ในการหาลิมิตของฟังก์ชัน พบว่า บางครั้งค่าของลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ x เข้าใกล้ a จะเท่ากับค่าของฟังก์ชัน ที่จุด $x=a$ ซึ่งจะเรียกฟังก์ชันลักษณะนี้ว่า มีความต่อเนื่องที่จุด $x=a$

นิยาม ฟังก์ชัน $f(x)$ จะต่อเนื่องที่ $x=a$ สามารถพิจารณาแยกเป็น 3 กรณีและต้องเป็นจริงทั้ง 3 กรณีดังนี้

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้ คือ $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)$
3. $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ หรือค่าของฟังก์ชันในข้อ 1 เท่ากับค่าของลิมิตในข้อ 2 (ข้อ 1 = ข้อ 2)

หมายเหตุ - ฟังก์ชัน $f(x)$ จะต่อเนื่องที่ $x=a$ สามารถพิจารณาได้จากกราฟของฟังก์ชันอีกวิธีหนึ่งได้ โดยที่กราฟของฟังก์ชันจะต้องไม่ขาดตอน ณ จุดนั้น และ ถ้า f ต่อเนื่องที่ทุกจุดบนเส้นจำนวนจริง จะเรียกว่าเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

- ถ้าฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่เป็นไปตามกรณีใดกรณีหนึ่งของนิยามจะได้ว่าฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x=a$

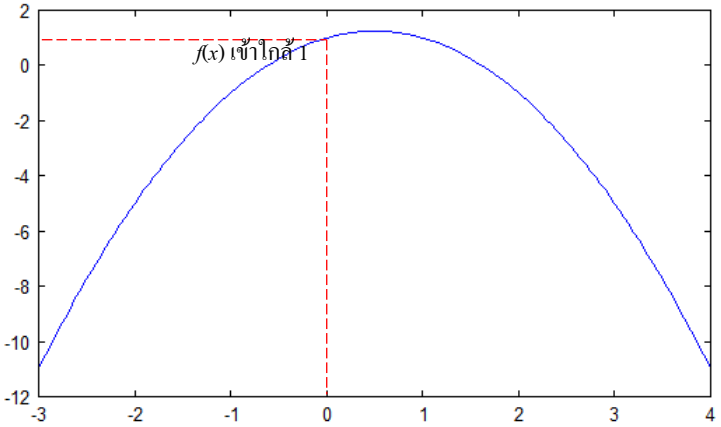
ตัวอย่าง 1.35 จงพิจารณาว่า $f(x)=-x^2+x+1$ ต่อเนื่องที่ $x=0$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> 1. $f(0)=1$ หาค่าได้

2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ หาค่าได้ และ

3. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(-x^2+x+1)=1$

ดังนั้น $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x=0$ ดังรูป



รูปที่ 1.32 กราฟจากโปรแกรม FreeMat ของ $f(x)=-x^2+x+1$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ตัวอย่าง 1.36 กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} 3-x \ ; \ x<2 \\ x^2-3 \ ; \ x\geq 2 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x=2$ หรือไม่

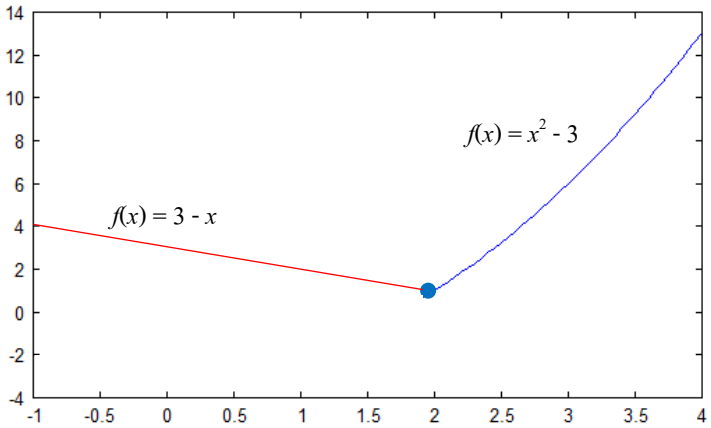
<u>วิธีทำ</u> 1. $f(2)=2^2-3=1$ หาค่าได้

2. ลิมิตซ้าย $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(3-x)$ ลิมิตขวา $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3)$

$=3-2=1$ $=2^2-3=1$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1$ แสดงว่า $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$ หาค่าได้ และ

3. $f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$ ดังนั้น $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x=2$ ดังรูป



รูปที่ 1.33 กราฟจากโปรแกรม FreeMat ของ $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x=2$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ตัวอย่าง 1.37 กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} -1 \ ; \ x<-1 \\ x^2 \ ; \ x\geq -1 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x=-1$ หรือไม่

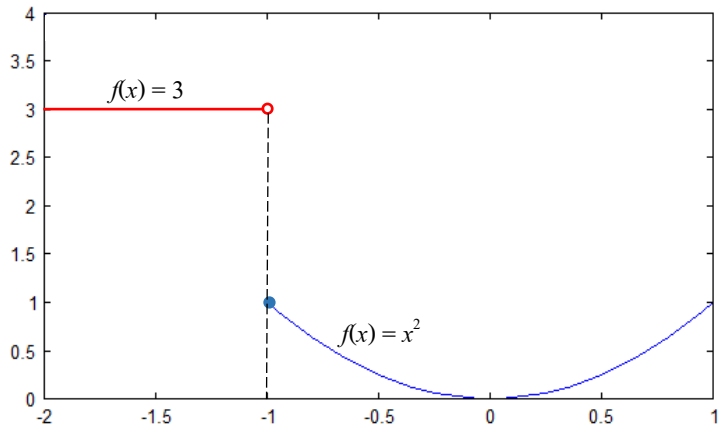
<u>วิธีทำ</u> 1. $f(-1)=(-1)^2=1$ หาค่าได้

2. ลิมิตซ้าย $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-1$ ลิมิตขวา $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} x^2$

$=(-1)^2=1$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ แสดงว่า $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ ไม่มีค่าลิมิต

ดังนั้น $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x=-1$ ดังรูป



รูปที่ 1.34 กราฟจากโปรแกรม FreeMat ของ $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x=-1$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ตัวอย่าง 1.38 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-8}$ จงพิจารณาว่า $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ x ค่าใด

<u>วิธีทำ</u> $f(x)$ หาค่าไม่ได้ในกรณีที่ส่วนเป็นศูนย์ คือ $x-8=0$

$$x-8=0$$

$$x=8$$

จาก $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-8}$

$$f(8)=\frac{8^2+1}{8-8}$$

$$=\frac{64+1}{0} \qquad \text{(มีส่วนเป็น 0 หาค่าไม่ได้)}$$

$$=\frac{65}{0}$$

ดังนั้น $f(-8)$ หาค่าไม่ได้ แสดงว่า $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x=8$

ตัวอย่าง 1.39 กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} 3x-2 & ; \ x<5 \\ \dfrac{x^2}{5-x} & ; \ x\geq 5 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ x ค่าใด

<u>วิธีทำ</u> $f(x)$ หาค่าไม่ได้ในกรณีที่ส่วนเป็นศูนย์ คือ $5-x=0$

$$5=x$$

$$x=5$$

จาก $f(x)=\dfrac{x^2}{5-x}$

$$f(5)=\frac{5^2}{5-5}$$

$$=\frac{25}{0}$$ (มีส่วนเป็น 0 หาค่าไม่ได้)

ดังนั้น $f(5)$ หาค่าไม่ได้ แสดงว่า $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x=5$

บทสรุป

ฟังก์ชันเป็นการแสดงความสัมพันธ์ของ 2 ตัวแปร คือ ตัวแปรต้นกับตัวแปรตาม ซึ่งการหาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ สามารถทำได้โดยเมื่อกำหนด $y=f(x)$ ค่าของตัวแปรต้น x เป็นตัวแปรป้อนเข้า จะเกิดผลลัพธ์ตัวแปรตาม y จากการแทนค่า

ลิมิตของฟังก์ชันจะมีความแตกต่างค่าของฟังก์ชัน เนื่องจากค่าของฟังก์ชัน f ที่จุด $x=a$ จะหมายถึงว่า $f(a)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด แต่ค่าลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a นั้น ต้องการที่พิจารณาหาค่าของฟังก์ชัน f ว่ามีค่าเท่าใดในขณะที่ x เข้าใกล้ a ซึ่งผลที่ได้มี 2 แบบ คือ หาค่าลิมิตได้หรือหาค่าลิมิตไม่ได้

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่ $x=a$ โดยที่

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้ คือ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$
3. $f(a)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

1. กำหนดให้ $f(x)=x^2+3x-1$ และ $g(x)=3x-2$ จงหาค่าฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $f(-2)$ 1.2 $f(0)$

1.3 $f(1)$ 1.4 $f(a)$

1.5 $f(b^2)$ 1.6 $f(a+b)$

1.7 $g(x-h)$ 1.8 $g(x-1)$

1.9 $g(2x+1)$ 1.10 $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$ เมื่อ $h\neq 0$

2. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & ; x<0 \\ 3-2x & ; 0\le x\le 5 \\ x-1 & ; x>5 \end{cases}$ และ $g(x)=\dfrac{x^2}{2-x}$ จงหาค่าฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1 $f(-1)$ 2.2 $f(0)$

2.3 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ 2.4 $f(6)$

2.5 $g(1)$ 2.6 $g(-2)$

2.7 $(f+g)(1)$ 2.8 $(f-g)(1)$

2.9 $(f\,g)(1)$ 2.10 $\left(\dfrac{f}{g}\right)(1)$

3. กำหนดให้ $f(x)=x^2+1$ และ $g(x)=x-4$ จงหาค่าฟังก์ชันต่อไปนี้

3.1 $(f+g)(x)$ 3.2 $(f-g)(x)$

3.3 $(f\,g)(x)$ 3.4 $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

3.5 $(f+g)\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 3.6 $(f-g)(3)$

3.7 $(f\,g)(0)$ 3.8 $\left(\dfrac{f}{g}\right)(5)$

4. จงหาฟังก์ชันประกอบ $(f\circ g)(x)$ และ $(g\circ f)(x)$ จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

4.1 $f(x)=2^x$ และ $g(x)=x^2$

4.2 $f(x)=4x-3$ และ $g(x)=\sqrt{x-2}$

4.3 $f(x)=\sqrt{4-x}$ และ $g(x)=4-x$

4.4 $f(x)=x^2-1$ และ $g(x)=\sqrt{x+1}$

4.5 $f(x)=\dfrac{1-x}{x}$ และ $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$

4.6 $f(x)=\sqrt[4]{x}$ และ $g(x)=x^4$

4.7 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ และ $g(x)=|x+1|$

5. กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x+2$ และ $h(x)=(x^2+1)^2$

จงหา $(f\circ g\circ h)(x)$ และ $(f\circ g\circ h)(1)$

6. กำหนดให้ A เป็นฟังก์ชันพื้นที่ผิวของลูกบาศก์ และกำหนดความยาวของด้านลูกบาศก์เป็น x

6.1 จงเขียนฟังก์ชันพื้นที่ผิวของลูกบาศก์

6.2 ถ้าความยาวของด้านลูกบาศก์มีค่าเท่ากับ 3 หน่วย จงหาพื้นที่ผิวของลูกบาศก์

6.3 ถ้าความยาวของด้านลูกบาศก์มีค่าเท่ากับ 3 หน่วย จงหาพื้นที่ผิวของลูกบาศก์ โดยใช้โปรแกรม FreeMat

7. อุณหภูมิอากาศในประเทศสหรัฐอเมริกาใช้หน่วยการวัด คือ องศาฟาเรนไฮต์ ($°F$) และในประเทศไทยใช้หน่วยการวัด คือ องศาเซลเซียส ($°C$)

7.1 จงเขียนฟังก์ชันของอุณหภูมิองศาเซลเซียส

7.2 จงแปลงอุณหภูมิ 72 องศาฟาเรนไฮต์ เป็นหน่วยองศาเซลเซียส

7.3 จงแปลงอุณหภูมิ 72 องศาฟาเรนไฮต์ เป็นหน่วยองศาเซลเซียส โดยใช้โปรแกรม FreeMat

8. บริษัทแห่งหนึ่งมีการผลิตสินค้าออกจำหน่ายในราคาชิ้นละ 300 บาท ถ้าบริษัทนี้ลงทุนการผลิตคงที่เป็นเงิน 800,000 บาท และมีค่าขนส่งชิ้นละ 70 บาท เมื่อบริษัทนี้ผลิตสินค้าออกจำหน่าย x ชิ้น

8.1 จงเขียนฟังก์ชันของต้นทุน

8.2 จงเขียนฟังก์ชันของรายได้

8.3 จงเขียนฟังก์ชันของกำไร

8.4 จงหากำไรของบริษัทนี้ ถ้าบริษัทนี้ผลิตสินค้าออกจำหน่าย 6,000 ชิ้น

8.5 จงหากำไรของบริษัทนี้ ถ้าบริษัทนี้ผลิตสินค้าออกจำหน่าย 6,000 ชิ้น โดยใช้โปรแกรม FreeMat

9. จงหาค่าลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

9.1 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+3x-1}$

9.2 $\lim_{x\to 2}\frac{1-5x}{x^2-x+7}$

9.3 $\lim_{x\to -1}\sqrt{x^2-x+9}$

9.4 $\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{1}{2x^3}}$

9.5 $\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^2-3x+6}{9x+7}}$

9.6 $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{3-x}$

9.7 $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-3x-4}{x-4}$

9.8 $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+4x+3}{x+3}$

9.9 $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3-x}$

9.10 $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-5x}{x^2-4x-5}$

9.11 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}$

9.12 $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$

9.13 $\lim_{x\to b}\frac{4b^2-(x+b)^2}{x-b}$

9.14 $\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$

9.15 $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x^2-7}-3}$

9.16 $\lim_{x\to 7}\frac{3-\sqrt{x+2}}{7-x}$

9.17 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4+\sqrt{x}-2}}$

9.18 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+2}\right)$

9.19 ถ้า $f(x)=\begin{cases}3 \ ; \ x\neq 2\\ 1 \ ; \ x=2\end{cases}$ จงหาค่าของ $\lim_{x\to 2} f(x)$

9.20 ถ้า $f(x)=\begin{cases}x^2 \ ; \ x\geq 0\\ 2x \ ; \ x<0\end{cases}$ จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0} f(x)$

9.21 ถ้า $f(x)=\begin{cases}3-x \ ; \ x>-1\\ -4x \ ; \ x\leq -1\end{cases}$ จงหาค่าของ $\lim_{x\to -1} f(x)$

9.22 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3}{4x+5}$

9.23 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2x+1}$

9.24 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-x+2}{6x^3+2x^2-7}$

9.25 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{x^4+2x+1}$

9.26 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(9x^5+2x^3-x^2-7)^2}{2x^8-x^2+4}$

9.27 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x^4+x+1)^2}{(x^2-8x-6)^4}$

9.28 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x-9}{(x^2+x+1)^3}$

9.29 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-3}{\sqrt{9x^2+1}}$

10. กำหนดให้ $f(x)=5x-2$ จงพิจารณาว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่จุด $x=2$ หรือไม่

11. กำหนดให้ $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ จงพิจารณาว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่จุด $x=1$ หรือไม่

12. กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{x+5}{x-3}$ จงพิจารณาว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่จุด $x=-3$ หรือไม่

13. กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ จงพิจารณาว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่จุด $x=2$ หรือไม่

14. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}4x & ;\ x\neq 1\\ 5-x & ;\ x=1\end{cases}$ แล้ว $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x=1$ หรือไม่

15. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5}{x-5} & ;\ x<5\\ 5 & ;\ x\geq 5\end{cases}$ แล้ว $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x=5$ หรือไม่

16. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ ไม่ต่อเนื่องที่ค่าใดบ้าง

16.1 $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-1}$

16.2 $f(x)=-7x+3$

16.3 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-8x+12}$

16.4 $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2+x-2}$

16.5 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+9}$

16.6 $f(x)=\dfrac{x}{x^4-x^2}$

16.7 $f(x)=\begin{cases}2 & ;\ x>1\\ -2 & ;\ x\leq 1\end{cases}$

16.8 $f(x)=\begin{cases}x^2 & ;\ x<0\\ 0 & ;\ x\geq 0\end{cases}$

เอกสารอ้างอิง

กมล เอกไทยเจริญ. (2537). **แคลคูลัสและเทคนิคการใช้ Graphing Calculator**. กรุงเทพมหานคร : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

กฤษณะ เนียมมณี. (2543). **แคลคูลัสสำหรับธุรกิจ I**. กรุงเทพมหานคร : พิทักษ์การพิมพ์.

ดำรงค์ ทิพย์โยธา, ยุวรีย์ พันธ์กล้า และณัฏฐนาถ ไตรภพ (2547). **แคลคูลัส 1**. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์ (2558). **แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร**. (พิมพ์ครั้งที่ 3). ปทุมธานี: สกายบุ๊กส์.

มนัส ประสงค์. (2535). **แคลคูลัสสำหรับวิศวกร 1.** กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2546). **พจนานุกรมศัพท์คอมพิวเตอร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน**. (พิมพ์ครั้งที่ 6). กรุงเทพมหานคร: ราชบัณฑิตยสถาน.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2549). **ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน**. (พิมพ์ครั้งที่ 9). กรุงเทพมหานคร : ราชบัณฑิตยสถาน.

อรอนงค์ บุญคล่อง. (2557). **แคลคูลัส 1.** (พิมพ์ครั้งที่ 5). กรุงเทพมหานคร : ทริปเพิ้ลเอ็ดดูเคชั่น.

อังสนา จั่นแดง และวิภาวรรณ สิงห์พริ้ง. (2545). **แคลคูลัส 1**. ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.

Find my soft., **A faster download experience**. https://www.freemat.findmysoft.com. (2564)

Google Technology Company., **Google website**. https://www.google.com. (2564)

John C. Peterson. (1997). **Technical Mathematics with Calculus**. New York: Delmar.